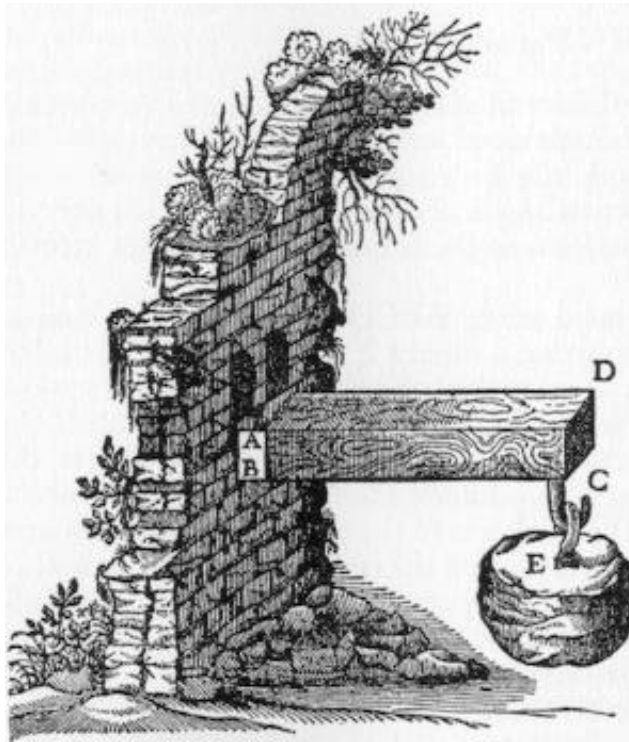




## LICENCE DE GENIE CIVIL ET INFRASTRUCTURES

### MECANIQUE DES STRUCTURES



*Galilei Galileo (dit Galilée 1564-1642)*

*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze*

## Préambule

Ce polycopié est un support aux cours et travaux dirigés de Licence de Sciences et Technologies, spécialité Génie Civil et Infrastructures. Il ne peut se substituer aux enseignements délivrés par l'équipe pédagogique. Il est constitué d'un succinct rappel de cours et de nombreux exercices.

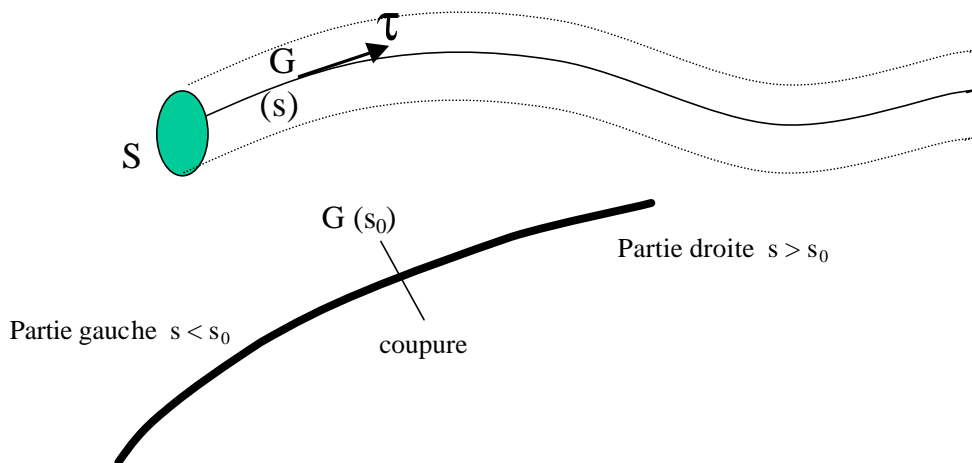
## Sommaire

Rappels de cours et formulaires .....	3
1. Bases de la Résistance Des Matériaux (RDM) .....	3
2. Le flambement.....	3
3. Théorèmes énergétiques .....	4
4. Méthode des forces – Superposition de problèmes isostatiques .....	4
5. Poutres continues - Formules des trois moments.....	5
6. Méthode des déplacements.....	5
7. Formulaire de flèches de poutres isostatiques.....	7
8. Formulaire des réactions de liaison de la poutre bi-encastree.....	7
9. Intégrales de Mohr .....	8
Exercices, Problèmes et sujets d'examens .....	12
1. Structures isostatiques.....	12
2. Calcul de déformées de structures isostatiques (par application du PTV) .....	14
3. Portique isostatique.....	15
4. Treillis isostatique .....	15
5. Poutres hyperstatiques – Méthode des forces.....	15
6. Problème : Tablier de pont .....	17
7. Problème : Flèche de lève-charge.....	18
8. Portique encastree en pied.....	19
9. Hyperstaticité interne - Portique à travée articulée.....	19
10. Portique – Méthode des 3 moments.....	19
11. Examen de première session 2000.....	20
12. Examen de seconde session 2003 .....	21
13. Poutres hyperstatiques – Méthode des déplacements .....	21
14. Examen de première session 2001.....	22
15. Examen de première session 2002.....	23
16. Examen de première session 2003.....	24
17. Examen de première session 2004.....	25
18. Examen de première session 2005.....	26
19. Bâtiment industriel (examen IUP-GCI Toulouse).....	27
20. Structure en treillis.....	28
21. Influence de la flexion dans les treillis .....	29

## RAPPELS DE COURS ET FORMULAIRES

### 1. Bases de la Résistance Des Matériaux (RDM)

Une poutre est un solide dont l'une des dimensions est grande devant les 2 autres ( $L \gg a, b$ ). Une poutre est générée par une surface dont le centre de gravité décrit une courbe appelée fibre moyenne de grande longueur devant  $a$  et  $b$ . Elle est schématisée par un milieu curviligne.



Torseur des efforts intérieurs en  $G(s_0)$ :  $\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M \end{Bmatrix}$  Efforts exercés par la partie droite ( $s > s_0$ ) sur la partie gauche ( $s < s_0$ )

$\tau$  : vecteur unitaire tangent en  $G(s_0)$  à la fibre moyenne.

$N$  : composante de la résultante  $R$  dans la direction de  $\tau$  : effort normal

$T$  : projection de la résultante  $R$  dans le plan de la section droite : effort tranchant

$M_t$  : composante du moment résultant  $M$  dans la direction de  $\tau$  : moment de torsion

$M_f$  : projection. du moment résultant  $M$  dans le plan de la section droite : moment fléchissant

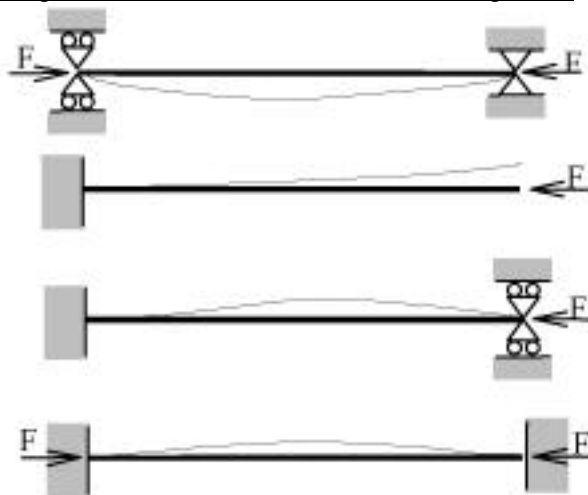
Pour un problème plan (cadre du cours), le torseur des efforts intérieurs se réduit aux 3 scalaires  $N$ ,  $T$  et  $M$  (flexion).

### 2. Le flambement

La force critique de flambement (théorie de Euler), pour une barre bi-articulée de longueur  $L_f$ , d'inertie de flexion  $I$  et

de module d'Young  $E$ , est :  $F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2}$

Configuration de flambement de la barre de longueur  $L$



Longueur équivalente  $L_f$

$$L_f = L$$

$$L_f = 2L$$

$$L_f = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$L_f = \frac{L}{2}$$

### 3. Théorèmes énergétiques

Pour une poutre droite de longueur L sous chargement plan, l'énergie de déformation réelle est :

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_1} \right) dx$$

Pour une poutre élancée, la contribution de l'effort tranchant à  $W_d$  est négligeable devant celle de la flexion.

Le travail réel d'une action mécanique de résultante  $\vec{F}$ , de moment  $\vec{C}$  en P, appliquée à un solide S en mouvement par rapport au référentiel R est :

$$W_e = \frac{1}{2} (\vec{U}_{P \in S/R} \cdot \vec{F} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{C})$$

**Principe des travaux virtuels (PTV) :** Le travail des efforts intérieurs réels (N, M, T) dans un champ de déformation virtuel (dus aux efforts intérieurs virtuels  $N^*$ ,  $M^*$ ,  $T^*$ ) est égal au travail des efforts extérieurs réels dans le champ de déplacement virtuel (associé aux déformations virtuelles).

Pour une poutre de longueur L soumise à des forces et moments aux points  $P_i$ , le PTV s'écrit :

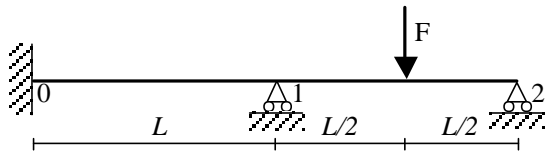
$$W_d(\sigma, \varepsilon^*) = W_e(F, U^*) \Leftrightarrow \int_0^L \left( \frac{NN^*}{ES} + \frac{MM^*}{EI} + \frac{TT^*}{GS_1} \right) dx = \sum_i [\vec{F}_i \cdot \vec{U}^*(P_i) + \vec{C}_i \cdot \vec{\Omega}^*(P_i)]$$

**Théorème de la charge unité :** Soit v le déplacement en P selon  $\vec{n}$  d'une poutre de longueur L, on applique une force virtuelle d'intensité égale à 1 en P selon  $\vec{n}$  pour déterminer v. Selon le PTV et en négligeant l'effet de T :

$$v = \int_0^L \left( \frac{N N^*}{ES} + \frac{M M^*}{EI} \right) dx$$

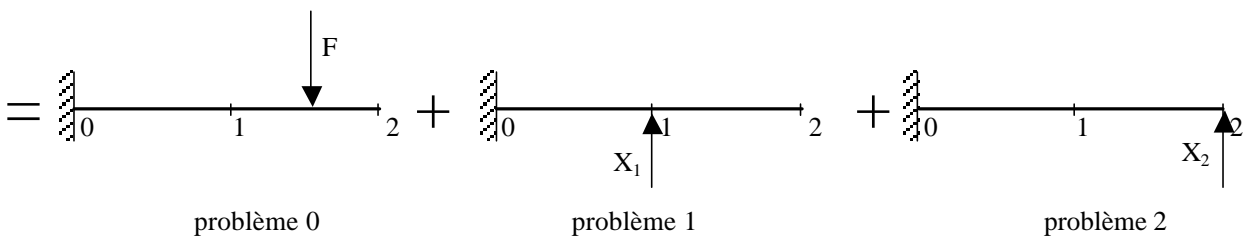
N, M efforts intérieurs réels et  $N^*$ ,  $M^*$  efforts intérieurs dus à la force +1

### 4. Méthode des forces – Superposition de problèmes isostatiques



La méthode est illustrée avec l'exemple de problème hyperstatique de degré h (h=2) ci-contre. Ce problème est équivalent à la superposition de (h+1) problèmes isostatiques associés à h conditions cinématiques.

Soient  $X_1$  et  $X_2$  les réactions aux appuis en 1 et 2.

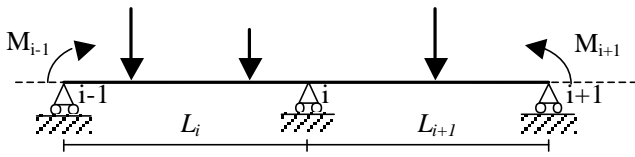


Conditions cinématiques  $\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0$   $\Delta_{i0}$  flèche en i (i=1,2) dans le pb 0  
 $\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0$   $\delta_{ij}$  flèche en i (i=1,2) dans le pb j pour une force  $X_i=1$

Après calculs ou par utilisation d'un formulaire :  $\Delta_{10} = \frac{-7FL^3}{12EI}$ ,  $\Delta_{20} = \frac{-27FL^3}{16EI}$ ,  $\delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}$ ,  $\delta_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$ ,

$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{5L^3}{6EI}$  d'où  $X_1 = \frac{43}{56} F$  et  $X_2 = \frac{11}{28} F$

## 5. Poutres continues - Formules des trois moments



Poutre continue soumise à des efforts verticaux. Soit  $M_i$  le moment fléchissant à l'appui  $i$ . La poutre est supposée d'inertie constante  $EI$ .

Soit  $\theta_i^+$  (resp.  $\theta_i^-$ ) la rotation à droite (resp. à gauche) de l'appui  $i$  pour la travée  $i$  à  $i+1$  (resp.  $i-1$  à  $i$ ) considérée indépendante.

La formule des trois moments est : 
$$6EI (\theta_i^+ - \theta_i^-) = M_{i-1}L_i + 2M_i (L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_{i+1}$$

Soient  $v_{i+1}$ ,  $v_i$  et  $v_{i-1}$  les dénivellations des appuis  $i+1$ ,  $i$  et  $i-1$  par rapport à une ligne de référence. La formule devient :

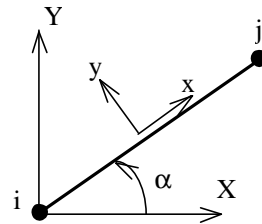
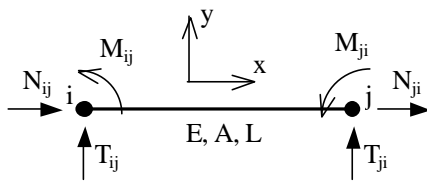
$$6EI (\theta_i^+ - \theta_i^- + \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+1}} + \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i}) = M_{i-1}L_i + 2M_i (L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_{i+1}$$

Les moment et effort tranchant dans la section d'abscisse  $x$  de la travée  $i-1$  à  $i$  sont :

$$\begin{cases} M(x) = m(x) + M_i \frac{x}{L_i} + M_{i-1}(1 - \frac{x}{L_i}) \\ T(x) = t(x) - \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} \end{cases} \quad \text{Avec } m(x) \text{ et } t(x) \text{ les efforts intérieurs dus au chargement extérieur sur la travée considérée indépendante, l'abscisse } x \text{ ayant son origine à l'appui } i-1.$$

## 6. Méthode des déplacements

Lois de comportement de la poutre  $ij$  dans la base  $(\bar{x}, \bar{y})$  liée à la poutre



Convention :  $T_{ij}$  = force transverse en  $i$  exercée par l'extérieur sur la poutre  $ij$ .

Les effort sont orientés par la base  $(\bar{x}, \bar{y})$ , donc en  $j$  on a le torseur des efforts intérieurs (action de  $x+$  sur  $x-$ ), en  $i$  on a l'opposé des efforts intérieurs.

Convention :  $T_{ij}^0$  = force transverse en  $i$  dû au chargement extérieur pour une poutre encastrée en  $i$  et  $j$  (voir formulaire).

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{4EI}{L} \omega_i + \frac{2EI}{L} \omega_j + \frac{6EI}{L^2} (v_i - v_j) + M_{ij}^0 \\ M_{ji} = \frac{2EI}{L} \omega_i + \frac{4EI}{L} \omega_j + \frac{6EI}{L^2} (v_i - v_j) + M_{ji}^0 \\ T_{ij} = \frac{6EI}{L^2} \omega_i + \frac{6EI}{L^2} \omega_j + \frac{12EI}{L^3} (v_i - v_j) + T_{ij}^0 \\ T_{ji} = -\frac{6EI}{L^2} \omega_i - \frac{6EI}{L^2} \omega_j - \frac{12EI}{L^3} (v_i - v_j) + T_{ji}^0 \\ N_{ij} = \frac{EA}{L} u_i - \frac{EA}{L} u_j + N_{ij}^0 \\ N_{ji} = -\frac{EA}{L} u_i + \frac{EA}{L} u_j + N_{ji}^0 \end{cases}$$

## Ecriture canonique de la méthode des déplacements

pour une seule poutre ij :

$$\bar{U}_{ij} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{pmatrix}; \quad \bar{F}_{ij} = \begin{pmatrix} N_{ij} \\ T_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ T_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix} \quad \bar{F}_{ij} = \bar{K}_{ij} \bar{U}_{ij} + \bar{F}_{ij}^0$$

$\bar{U}_{ij}$  = vecteur des déplacements inconnus de la poutre ij  
 $\bar{K}_{ij}$  = matrice de rigidité de la poutre ij  
 $\bar{F}_{ij}$  = vecteur des forces inconnues de la poutre ij  
 $\bar{F}_{ij}^0$  = vecteur des forces connues de la poutre ij, dues au chargement extérieur entre les nœuds

d'où le système à résoudre sur les poutres ij :

$$\sum_{\text{barres ij}} \bar{K}_{ij} \bar{U}_{ij} = \sum_{\text{noeuds}} \bar{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{noeuds}} - \sum_{\text{barres ij}} \bar{F}_{ij}^0 \Leftrightarrow \bar{K}_{\text{glob}} \bar{U}_{\text{glob}} = \bar{F}_{\text{glob}}$$

**Expressions de  $\bar{K}_{ij}$  dans les bases locale ( $\bar{x}, \bar{y}$ ) et de la structure ( $\bar{X}, \bar{Y}$ )** On note :  $C = \cos \alpha$  ;  $S = \sin \alpha$

En traction :

$$\text{Alors } \bar{U}_{ij} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} \text{ et } \bar{F}_{ij} = \begin{pmatrix} N_{ij} \\ T_{ij} \\ N_{ji} \\ T_{ji} \end{pmatrix} \quad \bar{K}_{ij} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\bar{x}, \bar{y}} \quad \bar{K}_{ij} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{pmatrix}_{\bar{X}, \bar{Y}}$$

$$\text{En flexion : } \bar{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}_{\bar{x}, \bar{y}} \quad \text{avec } \bar{U}_{ij} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & \frac{EA}{L} CS - \frac{12EI}{L^3} CS & -\frac{6EI}{L^2} S & -\frac{EA}{L} C^2 - \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{EA}{L} CS + \frac{12EI}{L^3} CS & -\frac{6EI}{L^2} S \\ \frac{EA}{L} CS - \frac{12EI}{L^3} CS & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{12EI}{L^3} C^2 & \frac{6EI}{L^2} C & -\frac{EA}{L} CS + \frac{12EI}{L^3} CS & -\frac{EA}{L} S^2 - \frac{12EI}{L^3} C^2 & \frac{6EI}{L^2} C \\ -\frac{6EI}{L^2} S & \frac{6EI}{L^2} C & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} S & -\frac{6EI}{L^2} C & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} C^2 - \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{EA}{L} CS + \frac{12EI}{L^3} CS & \frac{6EI}{L^2} S & \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{EA}{L} CS - \frac{12EI}{L^3} CS & \frac{6EI}{L^2} S \\ -\frac{EA}{L} CS + \frac{12EI}{L^3} CS & -\frac{EA}{L} S^2 - \frac{12EI}{L^3} C^2 & \frac{6EI}{L^2} C & -\frac{EA}{L} CS - \frac{12EI}{L^3} CS & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{12EI}{L^3} C^2 & -\frac{6EI}{L^2} C \\ -\frac{6EI}{L^2} S & \frac{6EI}{L^2} C & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} S & -\frac{6EI}{L^2} C & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}_{\bar{X}, \bar{Y}}$$

## 7. Formulaire de flèches de poutres isostatiques

	$0 \leq x \leq \alpha: y(x) = \frac{P(L-\alpha)}{6EIL} [x^3 - \alpha(2L-\alpha)x] \quad y'(x) = \frac{P(L-\alpha)}{6EIL} [3x^2 - \alpha(2L-\alpha)]$ $\alpha \leq x \leq L: y(x) = \frac{P\alpha}{6EIL} [(L-x)^3 - (L-\alpha)(L+\alpha)(L-x)]$ $y'(x) = \frac{P\alpha}{6EIL} [-3(L-x)^2 + (L-\alpha)(L+\alpha)]$ $y(\alpha) = -\frac{P\alpha^2(L-\alpha)^2}{3EIL} \quad \text{pour } x=\alpha$ $y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI} \quad \text{pour } x=\alpha=\frac{L}{2}$
	$y(x) = -\frac{p}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \quad y'(x) = -\frac{p}{24EI} (4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$ $y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5pL^4}{848EI} \quad \text{pour } x=\frac{L}{2}$
	$y(x) = \frac{M}{6EIL} (x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x) \quad y'(x) = \frac{M}{6EIL} (3x^2 - 6Lx + 2L^2)$
	$0 \leq x \leq \alpha: y(x) = \frac{Px^2(x-3\alpha)}{6EI} \quad y'(x) = \frac{Px(x-2\alpha)}{2EI}$ $\alpha \leq x \leq L: y(x) = \frac{P\alpha^2(\alpha-3x)}{6EI}$ $y(L) = -\frac{PL^3}{3EI} \quad \text{pour } x=\alpha=L$
	$y(x) = -\frac{p}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) \quad y'(x) = -\frac{p}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x)$ $y(L) = -\frac{pL^4}{8EI} \quad \text{pour } x=L$

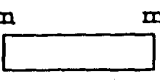
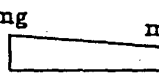
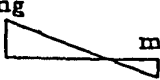
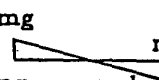
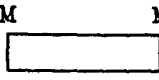
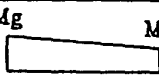

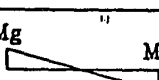
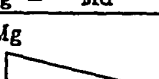
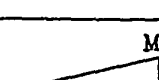
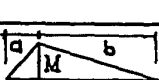
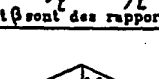
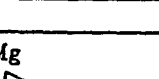

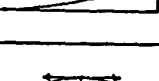
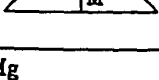
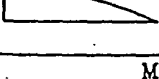
## 8. Formulaire des réactions de liaison de la poutre bi-encastée

	$T_{ij}^0 = \frac{qL}{2}; T_{ji}^0 = \frac{qL}{2}; M_{ij}^0 = \frac{qL^2}{12}; M_{ji}^0 = \frac{-qL^2}{12}$
	$T_{ij}^0 = \frac{qa^3}{L^2} \left(1 - \frac{a}{2L}\right); T_{ji}^0 = qa \left(1 - \frac{a^2}{L^2} + \frac{a^3}{2L^3}\right)$ $M_{ij}^0 = \frac{qa^2}{12L^2} (6L^2 - 8aL + 3a^2); M_{ji}^0 = \frac{-qa^3}{12L^2} (4L - 3a)$
	$T_{ij}^0 = \frac{F}{2}; T_{ji}^0 = \frac{F}{2}; M_{ij}^0 = \frac{FL}{8}; M_{ji}^0 = \frac{-FL}{8}$
	$T_{ij}^0 = F; T_{ji}^0 = F; M_{ij}^0 = \frac{Fa(L-a)}{L}; M_{ji}^0 = \frac{-Fa(L-a)}{L}$
	$T_{ij}^0 = \frac{Fb^2}{L^3} (b+3a); T_{ji}^0 = \frac{Fa^2}{L^3} (3b+a); M_{ij}^0 = \frac{Fab^2}{L^2}; M_{ji}^0 = \frac{-Fba^2}{L^2}$
	$T_{ij}^0 = \frac{6abC}{L^3}; T_{ji}^0 = \frac{-6abC}{L^3}; M_{ij}^0 = \frac{b(2a-b)}{L^2} C; M_{ji}^0 = \frac{a(2b-a)}{L^2} C$

9. Intégrales de Mohr

Valeur de  $\frac{1}{EI} \int Mm \cdot dx$

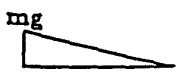
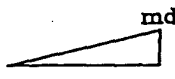
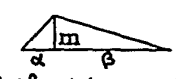

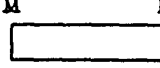

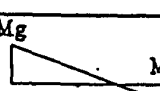
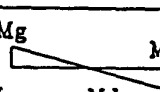


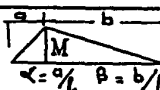



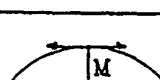
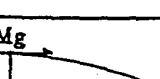
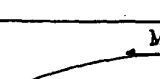
Ne pas oublier de multiplier le resultat par  $l/EI$

Introduire M et m avec leur SIGNE				
	$M \cdot m$	$1/2 M(mg+md)$	$1/2 M(mg+md)$	0
	$1/2 m(Mg+Md)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6 mg(Mg-Md)$
	$1/2 m(Mg+Md)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6(2Mgmg+Mgmd+Mdmg+2Mdmd)$	$1/6 mg(Mg-Md)$
 $Mg = -Md$	0	$1/6 Mg(mg-md)$	$1/6 Mg(mg-md)$	$1/3 Mgmg$
	$1/2 Mgm$	$1/6 Mg(2mg+md)$	$1/6 Mg(2mg+md)$	$1/6 Mgmg$
	$1/2 Mdm$	$1/6 Md(mg+2md)$	$1/6 Md(mg+2md)$	$-1/6 Mdmg$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ $\alpha$ et $\beta$ sont des rapports	$1/2 Mm$	$1/6 M[mg(1+\beta)+md(1+\alpha)]$	$1/6 M[mg(1+\beta)+md(1+\alpha)]$	$1/6 Mmg(1-2\alpha)$
	$1/2 Mm$	$1/4 M(mg+md)$	$1/4 M(mg+md)$	0
	$1/3 Mgm$	$1/12 Mg(3mg+md)$	$1/12 Mg(3mg+md)$	$1/6 Mgmg$
	$1/3 Mdm$	$1/12 Md(mg+3md)$	$1/12 Md(mg+3md)$	$1/6 Mdmd$
	$2/3 Mm$	$1/3 M(mg+md)$	$1/3 M(mg+md)$	0
	$2/3 Mgm$	$1/12 Mg(5mg+3md)$		$1/6 Mgmg$
	$2/3 Mdm$	$1/12 Md(3mg+5md)$		$-1/6 Mdmg$



Valeur de  $\frac{1}{L} \int Mm \cdot dx$

Ne pas oublier de multiplier le resultat par  $L/EI$

Introduire M et m avec leur SIGNE			 $\alpha$ et $\beta$ sont des rapports	
$M$ 	$1/2 Mmg$	$1/2 Mmd$	$1/2 Mm$	$1/2 Mm$
$Mg$  $Md$	$1/6 mg(2Mg+Md)$	$1/6 md(Mg+2Md)$	$1/6 m[Mg(1+\beta) + Md((1+\alpha))]$	$1/4 m(Mg+Md)$
$Mg$  $Md$	$1/6 mg(2Mg+Md)$	$1/6 md(Mg+2Md)$	$1/6 m[Mg(1+\beta) + Md((1+\alpha))]$	$1/4 m(Mg+Md)$
$Mg$  $Md$ $Mg = -Md$	$1/6 Mgm$	$-1/6 Mgm$	$1/6 Mgm(1-2\alpha)$	0
$Mg$ 	$1/3 Mgm$	$1/6 Mgm$	$1/6 Mgm(1+\beta)$	$1/4 Mgm$
$Md$ 	$1/6 Mdm$	$1/3 Mdm$	$1/6 Mdm(1+\alpha)$	$1/4 Mdm$
 $\alpha = a/L$ $\beta = b/L$ $\alpha$ et $\beta$ sont des rapports	$1/6 Mmg(1+\beta)$	$1/6 Mmd(1+\alpha)$	$1/3 Mm$	$1/12 Mm(3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$
	$1/4 Mmg$	$1/4 Mmd$	$1/12 Mm(3-4\alpha^2)/\beta$ valable pour $\alpha < \beta$	$1/3 Mm$
$Mg$ 	$1/4 Mgm$	$1/12 Mdm$	$1/12 Mdm(1+\beta+\beta^2)$	$7/48 Mgm$
$Md$ 	$1/12 Mdm$	$1/4 Mdm$	$1/12 Mdm(1+\alpha+\alpha^2)$	$7/48 Mdm$
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$5/12 Mm$
$Mg$ 	$5/12 Mgm$	$1/4 Mgm$	$1/12 Mgm(5-\alpha-\alpha^2)$	$17/48 Mgm$
$Md$ 	$1/4 Mdm$	$5/12 Mdm$	$1/12 Mdm(5-\beta-\beta^2)$	$17/12 Mdm$

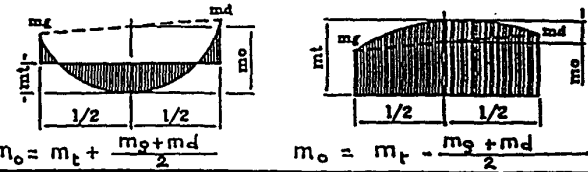
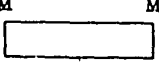
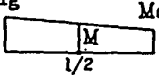
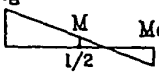
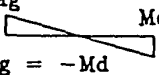
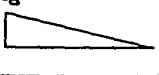
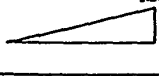
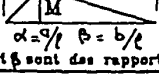

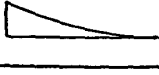
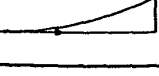
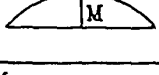
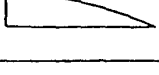
Valeur de  $\frac{1}{l} \int Mm \cdot dx$

Ne pas oublier de multiplier le resultat par  $l/EI$

Introduire M et m avec leur SIGNE					
	$1/3 Mmg$	$1/3 Mmd$	$2/3 Mm$	$2/3 Mmg$	$2/3 Mmd$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Mg+5Md)$
	$1/12 mg(3Mg+Md)$	$1/12 md(3Md+Mg)$	$1/3 m(Mg+Md)$	$1/12 mg(5Mg+3Md)$	$1/12 md(3Mg+5Md)$
	$1/6 Mgmg$	$1/6 Mdmd$	0	$1/6 Mgmg$	$1/6 Mdmd$
	$1/4 Mgmg$	$1/12 Mgmd$	$1/3 Mgm$	$5/12 Mgmg$	$1/4 Mgmd$
	$1/12 Mdmg$	$1/4 Mdmd$	$1/3 Mdm$	$1/4 Mdmg$	$5/12 Mdmd$
	$1/12 Mmg(1+\beta+\beta^2)$	$1/12 Mmd(1+\alpha+\alpha^2)$	$1/3 Mm(1+\alpha\beta)$	$1/12 Mmg(5-\alpha-\alpha^2)$	$1/12 Mmd(5-\beta-\beta^2)$
	$7/48 Mmg$	$7/48 Mmd$	$5/12 Mm$	$17/48 Mmg$	$17/48 Mmd$
	$1/5 Mgm$	$1/30 Mgmd$	$1/5 Mgm$	$3/10 Mgmg$	$2/15 Mgmd$
	$1/30 Mdmg$	$1/5 Mdmd$	$1/5 Mdm$	$2/15 Mdmg$	$3/10 Mdmd$
	$1/5 Mmg$	$1/5 Mmd$	$8/15 Mm$	$7/15 Mmg$	$7/15 Mmd$
	$3/10 Mgm$	$2/15 Mgmd$	$7/15 Mgm$	$8/15 Mgmg$	$11/30 Mgmd$
	$2/15 Mdmg$	$3/10 Mdmd$	$7/15 Mdm$	$11/30 Mdmg$	$8/15 Mdmd$

Ne pas oublier de multiplier le resultat par  $l/EI$

Valeur de  $\frac{1}{l} \int Mm \cdot dx$

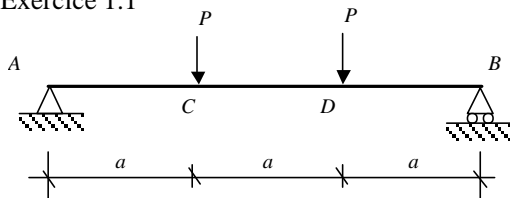
Introduire M et m avec leur SIGNE	$\frac{1}{l} \int M^2 \cdot dx$	 $m_o = m_t + \frac{m_g + m_d}{2}$ $m_o = m_t - \frac{m_g + m_d}{2}$
	$M^2$	$\frac{1}{6} M(mg + 4mt + md)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2 + MgMd + Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg + 4Mmt + Mdmd)$
	$\frac{1}{3}(Mg^2 + MgMd + Md^2)$	$\frac{1}{6} (Mgmg + 4Mmt + Mdmd)$
	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg - md)$
	$\frac{1}{3} Mg^2$	$\frac{1}{6} Mg(mg + 2mt)$
	$\frac{1}{3} Md^2$	$\frac{1}{6} Md(2mt + md)$
 $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ $\alpha$ et $\beta$ sont des rapports	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{M}{6} \left[ -2m_o(1 + \alpha + \alpha^2) + (m_o - m_g + md)(1 + \alpha) + 3m_g \right]$
	$\frac{1}{3} M^2$	$\frac{1}{24} M(mg + 10mt + md)$
	$\frac{1}{5} Mg^2$	$\frac{1}{60} Mg[5(3mg + md) + 12m_o]$
	$\frac{1}{5} Md^2$	$\frac{1}{60} Md[5(mg + 3md) + 12m_o]$
	$\frac{8}{15} M^2$	$\frac{1}{15} M[5(mg + md) + 8m_o]$
	$\frac{8}{15} Mg^2$	ou $\frac{1}{60} Mg[5(5mg + 3md) + 28m_o]$ $\frac{1}{60} Mg(11mg + md + 28mt)$

## EXERCICES, PROBLEMES ET SUJETS D'EXAMENS

### 1. Structures isostatiques

Après avoir vérifié que les structures suivantes sont isostatiques, déterminer les diagrammes des efforts normal (N), tranchant (T) et du moment fléchissant (M) au sein de celles-ci.

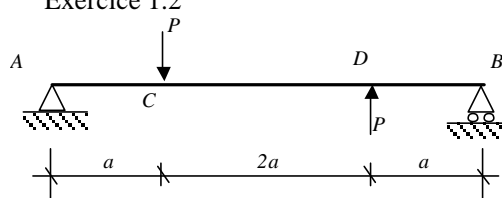
Exercice 1.1



Rép. :  $T_A = T_{C(g)} = -T_{D(d)} = -T_B = -P$

$T_{C(d)} = T_{D(g)} = 0, M_C = M_D = Pa$

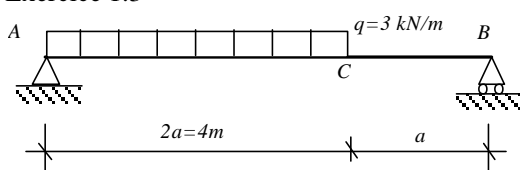
Exercice 1.2



Rép. :  $M_C = -M_D = Pa/2$

$T_A = T_{C(g)} = T_{D(d)} = T_B = -T_{C(d)} = -T_{D(g)} = -P/2$

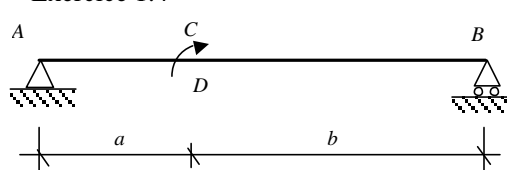
Exercice 1.3



Rép. :  $T_A = -8 \text{ kN}, T_C = T_B = 4 \text{ kN}$

$M_C = 8 \text{ kNm}$

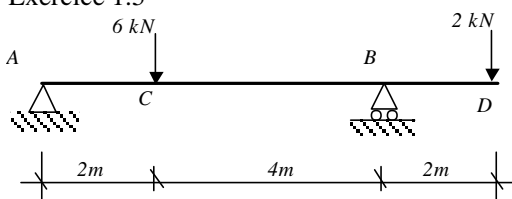
Exercice 1.4



Rép. :  $T_A = T_B = T_D = C/(a+b)$

$M_{D(g)} = -Ca/(a+b), M_{D(d)} = Cb/(a+b)$

Exercice 1.5

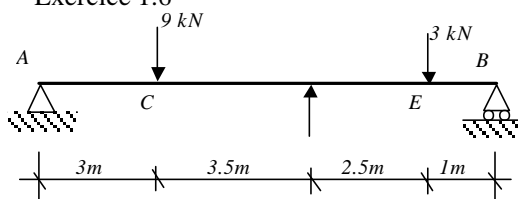


Rép. :  $T_A + T_{C(g)} = -3.33 \text{ kN}$

$T_{C(d)} = T_{B(g)} = 2.67 \text{ kN}, T_{B(d)} = T_D = -2 \text{ kN}$

$M_C = 6.67 \text{ kNm}, M_B = -4 \text{ kNm}$

Exercice 1.6

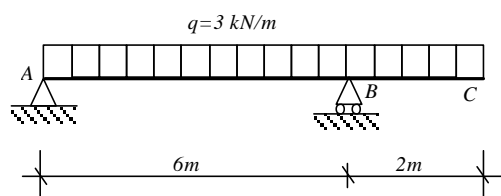


Rép. :  $T_A = T_{C(g)} = -T_{C(d)} = -T_{D(g)} = -4.5 \text{ kN}$

$T_{D(d)} = T_{E(g)} = -T_{E(d)} = -T_B = -1.5 \text{ kN}$

$M_C = 13.5 \text{ kNm}, M_D = -2.25 \text{ kNm}, M_E = 1.5 \text{ kNm}$

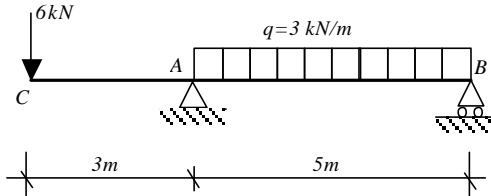
Exercice 1.7



Rép. :  $T_A = -8 \text{ kN}, T_{B(g)} = 10 \text{ kN}, T_{B(d)} = -6 \text{ kN}$

$M_{max} = 10.67 \text{ kNm}, M_B = -6 \text{ kNm}$

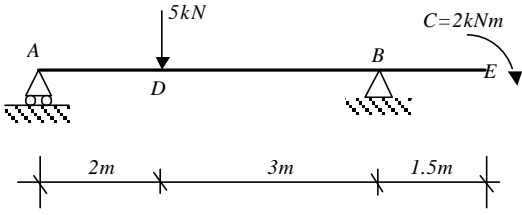
Exercice 1.8



Rép. :  $T_C = T_{A(g)} = 6 \text{ kN}, T_{A(d)} = -11.1 \text{ kN}, T_B = 3.9 \text{ kN}$

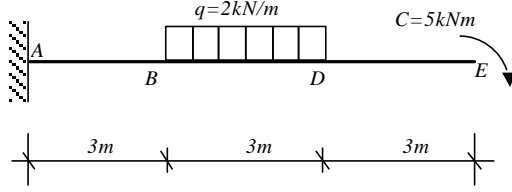
$M_A = -18 \text{ kNm}, M_{max} = 2.5 \text{ kNm}$

Exercice 1.9



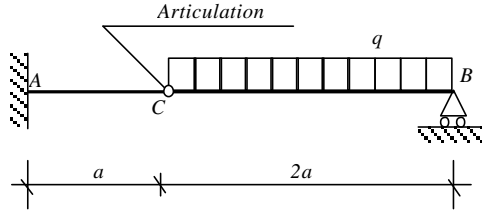
Rép. :  $T_A = T_{D(g)} = -2.6 \text{ kN}$ ,  $T_{D(d)} = T_{B(g)} = 2.4 \text{ kN}$ ,  $T_{B(d)} = T_E = 0$   
 $M_D = 5.2 \text{ kNm}$ ,  $M_B = M_E = -2 \text{ kNm}$

Exercice 1.10



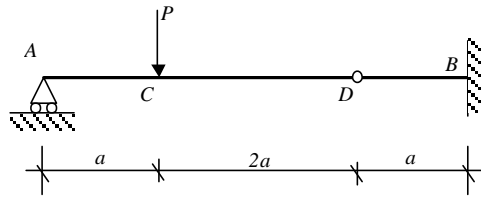
Rép. :  $T_A = T_B = -6 \text{ kN}$ ,  $T_D = T_C = 0$   
 $M_A = -31 \text{ kNm}$ ,  $M_B = -14 \text{ kNm}$ ,  $M_D = M_E = -5 \text{ kNm}$

Exercice 1.11



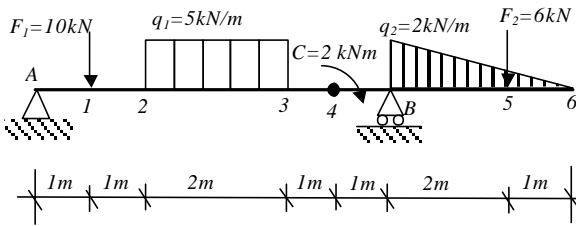
Rép. :  $T_A = T_C = -T_B = -qa$ ,  
 $M_A = -qa^2$ ,  $M_{max} = qa^2/2$

Exercice 1.12

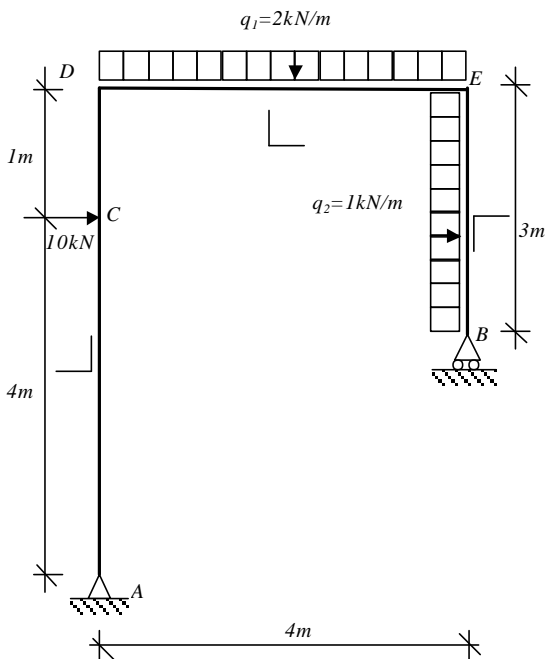


Rép. :  $T_A = T_{C(g)} = -2P/3$ ,  $T_{C(d)} = T_D = T_B = P/3$   
 $M_C = 2Pa/3$ ,  $M_D = 0$ ,  $M_B = -Pa/3$

Exercice 1.13



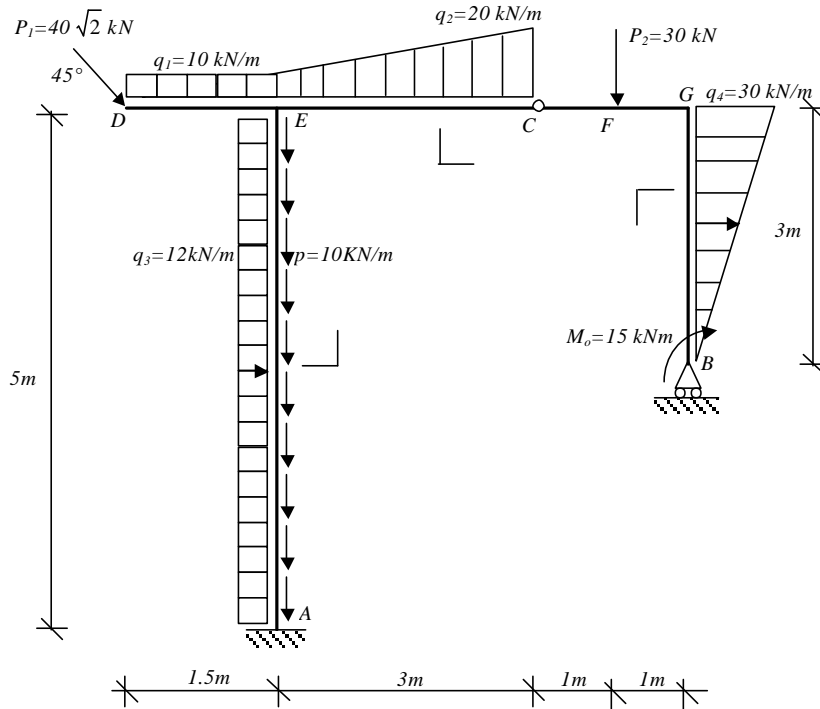
Rép. :  $V_A = 10.5 \text{ kN}$ ,  $V_B = 18.5 \text{ kN}$   
 $T_A = T_{1(g)} = -10.5 \text{ kN}$ ,  $T_{1(d)} = T_2 = -0.5 \text{ kN}$   
 $T_3 = T_4 = T_{B(g)} = 9.5 \text{ kN}$ ,  $T_{B(d)} = -9 \text{ kN}$   
 $T_{5(g)} = -6.33 \text{ kN}$ ,  $T_{5(d)} = -0.33 \text{ kN}$ ,  $T_6 = 0$   
 $M_1 = 10.5 \text{ kNm}$ ,  $M_2 = 11 \text{ kNm}$ ,  $M_3 = 2 \text{ kNm}$ ,  $M_{4(g)} = -7.5 \text{ kNm}$   
 $M_{4(d)} = -5.5 \text{ kNm}$ ,  $M_B = -15 \text{ kNm}$ ,  $M_5 = -0.11 \text{ kNm}$



Exercice 1.14

Rép. :  $V_A = -8.625 \text{ kN}$ ,  $V_B = 16.625 \text{ kN}$ ,  $H_A = -13 \text{ kN}$   
 $AD : N_{AD} = 8.625 \text{ kN}$ ,  $T_A = T_{C(g)} = -13 \text{ kN}$ ,  $T_{C(d)} = T_D = -3 \text{ kN}$   
 $DE : N_{DE} = 3 \text{ kN}$ ,  $T_D = 8.625 \text{ kN}$ ,  $T_E = 16.625 \text{ kN}$   
 $EB : N_{EB} = -16.625 \text{ kN}$ ,  $T_E = 3 \text{ kN}$ ,  $T_B = 0$   
 $M_C = 52 \text{ kNm}$ ,  $M_D = 55 \text{ kNm}$ ,  $M_E = 4.5 \text{ kNm}$

Exercice 1.15



Rép. :  $H_A = -55 \text{ kN}$ ,  $V_A = 135 \text{ kN}$ ,  $V_B = 45 \text{ kN}$

AE :  $N_A = -135 \text{ kN}$ ,  $N_E = -85 \text{ kN}$ ,  $T_A = -55 \text{ kN}$ ,  $T_E = 5 \text{ kN}$ ,  $M_A = 83.75 \text{ kNm}$ ,  $M_E = -41.25 \text{ kNm}$

DE :  $N_D = N_E = -40 \text{ kN}$ ,  $T_D = 40 \text{ kN}$ ,  $T_E = 55 \text{ kN}$ ,  $M_E = -71.25 \text{ kNm}$

EG :  $N_E = N_G = -45 \text{ kN}$ ,  $T_E = -30 \text{ kN}$ ,  $T_{C(g)} = T_{C(d)} = T_{F(g)} = 15 \text{ kN}$ ,  $T_{F(d)} = T_G = 45 \text{ kN}$ ,  $M_E = -30 \text{ kNm}$ ,  $M_F = -15 \text{ kNm}$ ,  $M_G = -60 \text{ kNm}$

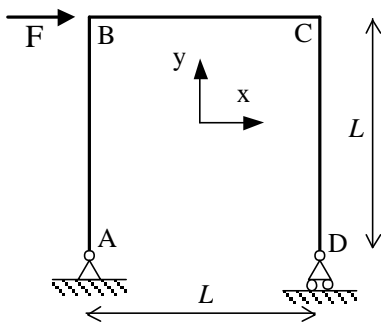
GB :  $N_G = N_B = -45 \text{ kN}$ ,  $T_B = 0$ ,  $T_G = -45 \text{ kN}$ ,  $M_G = -60 \text{ kNm}$ ,  $M_B = -15 \text{ kNm}$

**2. Calcul de déformées de structures isostatiques (par application du PTV)**

Les structures étudiées seront supposées constituées de poutres élancées homogènes, de même module d'Young E et de mêmes section (surface S et inertie de flexion I).

- Exercice 2.1 Déterminer la flèche en C de l'exercice 1.2
- Exercice 2.2 Déterminer la flèche en C de l'exercice 1.3
- Exercice 2.3 Déterminer la rotation en D de l'exercice 1.4
- Exercice 2.4 Déterminer la flèche maximale de l'exercice 1.11
- Exercice 2.5 Déterminer la flèche maximale de l'exercice 1.13
- Exercice 2.6 Déterminer la rotation et le déplacement horizontal en D de l'exercice 1.14
- Exercice 2.7 Déterminer la rotation et le déplacement horizontal en E de l'exercice 1.15

### 3. Portique isostatique



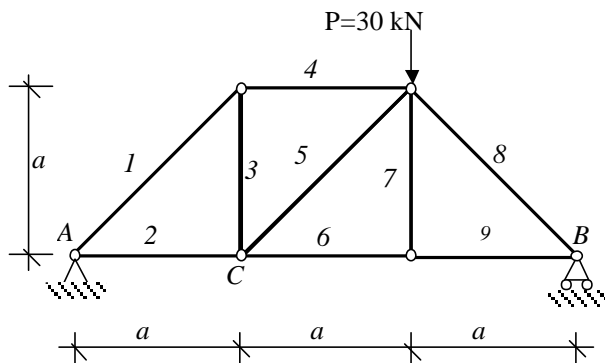
Le portique est constitué de barres identiques.

$L = 4 \text{ m}$ ,  $F = 500 \text{ daN}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $I = 3.89 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$

1. Tracer les diagrammes de N, T, M
2. Calculer le déplacement horizontal en D,  $u_D$ .
3. Démontrer que l'effet de la traction est négligeable devant celui de la flexion.
4. Calculer la rotation en A,  $\omega_A$ .

Rép. :  $u_D = 3.26 \text{ cm}$ ,  $\omega_A = -8.15 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$

### 4. Treillis isostatique



Les barres du système ont toutes la même rigidité en traction ES.

$a = 3 \text{ m}$ ,  $ES = 31.5 \cdot 10^5 \text{ N}$

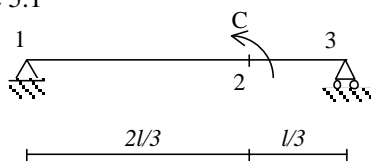
Calculer le déplacement vertical du nœud C.

Rép. :  $f_C = 6 \text{ mm}$

### 5. Poutres hyperstatiques – Méthode des forces

Les structures étudiées seront supposées constituées de poutres élancées homogènes, de même module d'Young E et de mêmes section (surface S et inertie de flexion I).

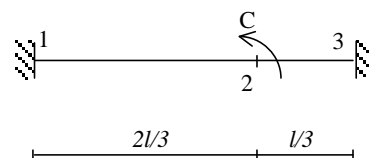
Exercice 5.1



1. Déterminer les diagrammes de N, T, M
2. Déterminer les rotations en 1 et 3

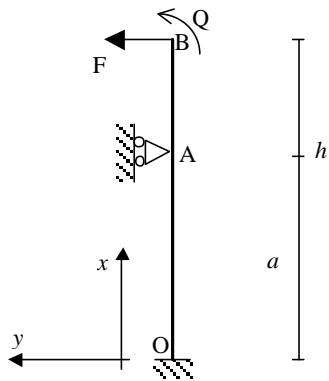
Rép. :  $EIw_1 = -Cl/9$ ,  $EIw_3 = Cl/18$

Exercice 5.2



1. Utiliser les résultats de l'exercice 5.1 pour déduire les moments aux encastres
2. Déterminer la rotation en 2

Exercice 5.3 – Grue de manutention (extrait d'un sujet de l'agrégation de génie civil)



$I=0.045 \text{ m}^4$ ,  $E=210 \text{ GPa}$ ,  $h=110 \text{ m}$ ,  $a=60 \text{ m}$ ,  $F=20 \text{ kN}$ ,  $Q=1150 \text{ kNm}$

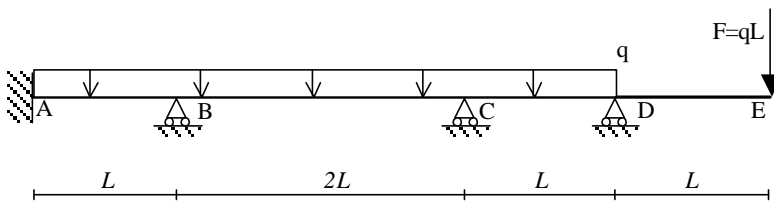
1. Déterminer les actions de liaison  $Y_O$ ,  $M_O$ ,  $Y_A$
2. Déterminer le déplacement horizontal en B,  $v_B$
3. Déterminer les diagrammes de N, T, M

En fait, l'appui simple en A a une certaine souplesse de rigidité  $k=10^6 \text{ N/m}$

4. Déterminer  $Y_A$  et le déplacement horizontal en A,  $v_A$
5. Déterminer le déplacement horizontal en B,  $v_B$

Rép. : 1.  $Y_O=53.75 \text{ kN}$ ,  $M_O=10.75 \text{ kNm}$ ,  $Y_A=-73.75 \text{ kN}$  2.  $v_B=41 \text{ cm}$  4.  $Y_A=-65.19 \text{ kN}$   $v_A=6.5 \text{ cm}$  5.  $v_B=55.7 \text{ cm}$

Exercice 5.4 – Poutre encastrée sur 3 appuis



Les inconnues hyperstatiques sont les réactions aux appuis

1. Déterminer les actions de liaison
2. Déterminer les diagrammes de T, M

Rép. : 1.  $Y_A=11/116 qL$ ,  $Y_B=945/464 qL$ ,  $Y_C=213/464 qL$ ,  $Y_D=559/232 qL$

2.  $T_A=-11/116 qL$ ,  $T_{B(g)}=105/116 qL$ ,  $T_{B(d)}=-525/464 qL$ ,  $T_{C(g)}=403/464 qL$ ,  $T_{C(d)}=95/232 qL$ ,  $T_{D(g)}=327/232 qL$

$T_{D(d)}=T_E=-qL$ ,  $M_A=3/58 qL^2$ ,  $M_B=-41/116 qL^2$ ,  $M_C=-21/232 qL^2$ ,  $M_D=-qL^2$ ,  $M_E=0$ ,  $M(\max>0)=0.287 qL^2$

Exercice 5.5 – Résoudre l'exercice 5.4 en déterminant les moments aux liaisons par la méthode des 3 moments



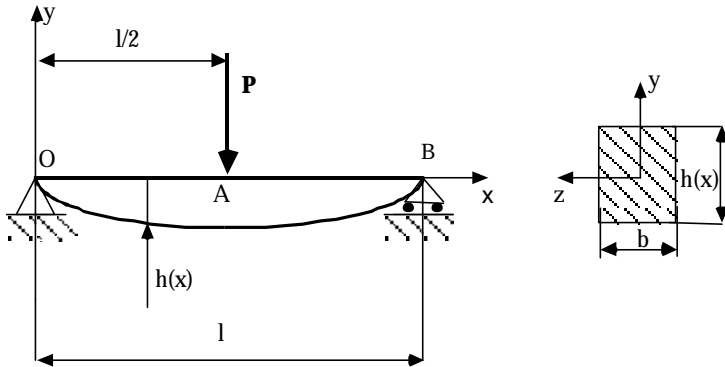
## 6. Problème : Tablier de pont

Nous allons comparer deux conceptions possibles d'un tablier de pont. La première géométrie envisagée est de type poutre sur laquelle vient reposer le plancher du pont. La deuxième géométrie est de type treillis. Dans la dernière partie du devoir nous considérerons la géométrie de type poutre mais hyperstatique.

### Première partie :

Un tablier de pont est conçu à partir d'une architecture de type poutre à section non constante. La sollicitation dans la poutre sera maximale quand la charge maximum admissible sera au centre du pont. Le poids du plancher et du véhicule seront schématisés par une force ponctuelle  $P$  unique au centre du tablier.

La poutre est de largeur  $b$  constante (selon  $z$ ), de hauteur  $h(x)$  non constante (selon  $y$ ) et de longueur  $l$  (selon  $x$ ). Sa section est rectangulaire, son module d'Young est  $E$ , sa masse volumique  $\rho$ ,



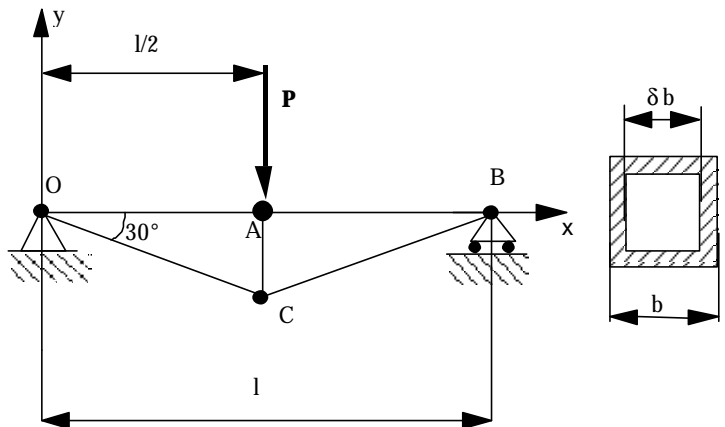
La poutre est en acier de masse volumique  $\rho$ , de limite élastique  $f_e$ , le coefficient global de sécurité adopté est  $s$ . On suppose  $l \gg h$  et  $b$ .

1. A quels types de sollicitations cette poutre est-elle soumise ? Peut-on les ramener à une sollicitation pure unique ?

2. Déterminer  $h(x)$  afin que la condition limite de résistance élastique soit atteinte en tout point, on appelle alors ce type de poutre : " poutre d'égalité résistance ".

3. Calculer le poids de cette poutre.

### Deuxième partie :



Le tablier de pont est maintenant conçu à partir d'une architecture de type treillis. Les poutres seront choisies tubulaires à section constante carrée de largeur  $b$ . L'épaisseur des tubes est de  $0,1b$  (soit  $\delta = 0,8$ ).

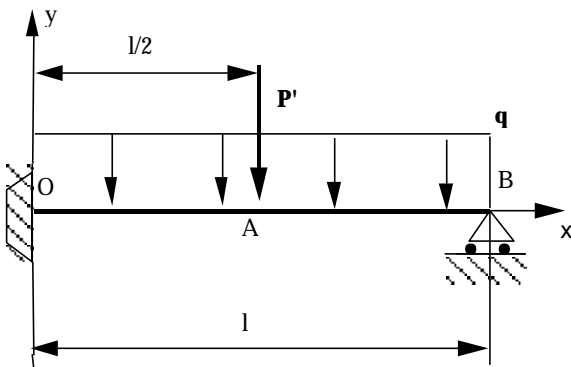
1. Ce treillis est-il rigide, isostatique ? Déterminer les efforts dans les barres. Les résultats seront donnés sous forme de tableau.

2. Dimensionner le treillis (c-à-d déterminer  $b$ ) au poids minimum.

3. Calculer le poids de ce treillis.

### Troisième partie :

Pour des questions de rigidité, on encastre l'appui en O. On choisit la géométrie de type poutre de section constante. La charge ponctuelle  $P$  des deux premières parties est remplacée par le poids réparti  $q$  et par la charge ponctuelle  $P'$ .



1. Calculer le moment d'encastrement  $M_O$  par la méthode de superposition.

3. Calculer le moment d'encastrement  $M_O$  par le théorème des trois moments.

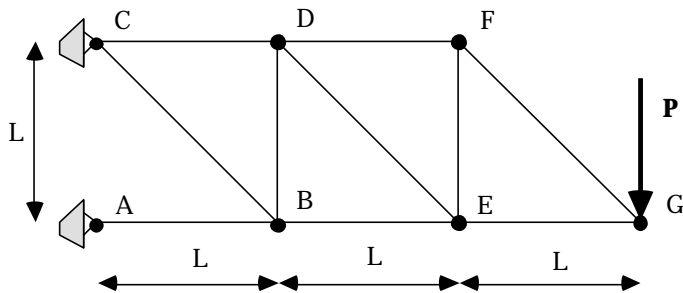
4. Calculer la section de la poutre.

### Données numériques :

$$s = 3, f_e = 5 \cdot 10^8 \text{ Pa}, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, l = 10 \text{ m}, P = 1.5 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$P' = 10^6 \text{ N}, q = 0.5 \cdot 10^5 \text{ N/m}, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, b = 0.2 \text{ m}$$

## 7. Problème : Flèche de lève-charges



L'objet de cette étude est le dimensionnement d'une flèche de lève-charges.

On néglige le poids des barres. On note  $N_{AB}$  la tension dans la barre AB.

**Question préliminaire :** Justifier l'hypothèse consistant à considérer que les barres sont articulées entre elles.

### I. Treillis isostatique

- Vérifier que le problème est isostatique. Déterminez les réactions aux appuis A et C.
- Déterminer les tensions dans les barres.

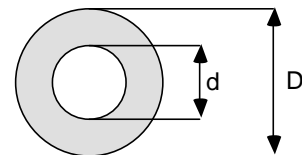
Rép. :  $N_{AB} = -3P$ ,  $N_{BC} = \sqrt{2}P$ ,  $N_{CD} = 2P$ ,  $N_{BD} = -P$ ,  $N_{BE} = -2P$ ,  $N_{DE} = \sqrt{2}P$ ,  $N_{DF} = P$ ,  $N_{FE} = -P$ ,  $N_{EG} = -P$ ,  $N_{FG} = \sqrt{2}P$

- Dans le but de dimensionner de manière optimale ce treillis, deux critères de dimensionnement sont retenus:

- Poids minimum: les poutres peuvent être de sections différentes.
- Coût minimum: les poutres sont toutes de même section (prix unitaire dégressif en fonction du nombre d'unités).

- Question préliminaire:

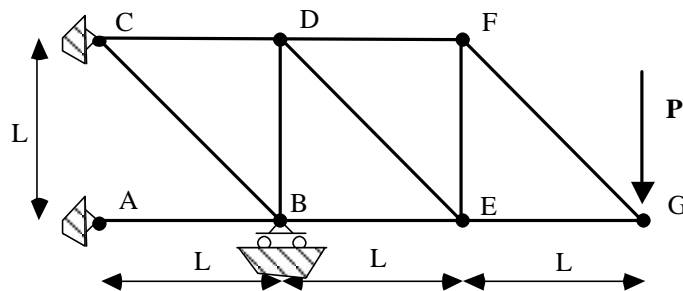
Pour une poutre calculée au flambement par la théorie d'Euler, quel est le rapport  $r = P_1/P_2$  des poids  $P_1$  et  $P_2$  d'une poutre 1 circulaire pleine ( $\delta = d/D = 0$ ) et d'une poutre 2 tubulaire ( $\delta = d/D = 0.8$ ). Conclusion ?



Ayant choisi d'utiliser des tubes ( $\delta = d/D = 0.8$ ) pour chacune des barres, déterminez les diamètres extérieurs selon les critères :

- Poids minimum.
  - Coût minimum (sections identiques). Quel est l'excès relatif de poids par rapport au dimensionnement précédent.
- Dans la suite du problème, le dimensionnement retenu sera celui du c. Déterminer le déplacement vertical en G.
  - Déterminer le déplacement vertical en B.

### II. Treillis hyperstatique



Dans le but de rigidifier la structure, un appui simple à réaction verticale est installé en B.

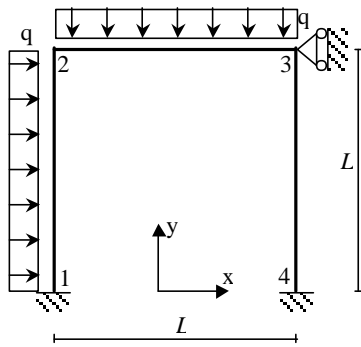
- Ce problème est alors hyperstatique, de quel degré ? En utilisant le principe de superposition, expliquer quelle sera la démarche de résolution.
- Déterminer la réaction verticale en B:  $Y_B$ .
- Déterminer les tensions dans les barres.
- Déterminez le déplacement vertical en G.

- Que pensez vous alors du dimensionnement qui avait été retenu. Que faudrait-il faire ?

### Données numériques:

- Coefficient global de sécurité :  $s = 3$  (idem en flambement et en traction-compression, inclut tous les coefficients partiels de sécurité)
- Limite élastique:  $f_e = 500$  MPa, Module d'Young:  $E = 200$  GPa
- $L = 2$  m,  $P = 300000$  N

## 8. Portique encastré en pied



La structure S 1234 est un portique d'inertie constante  $EI$ , constitué d'une poutre et de poteaux d'élancement important encastrés entre eux.

Les effets des efforts tranchant et normal seront négligés devant celui du moment fléchissant.

$E = 210 \text{ GPa}$ ,  $q = 8 \text{ kN/m}$ ,  $L = 4 \text{ m}$

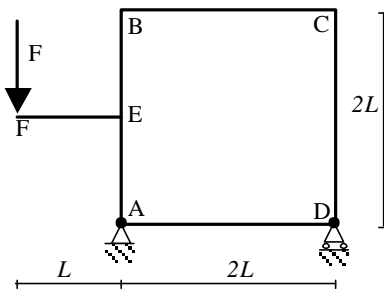
1. Déterminer les actions de liaison

Rép. :  $X_1 = -29/60 qL$ ,  $Y_1 = 11/20 qL$ ,  $M_1 = 7/90 qL^2$ ,  $X_3 = -9/20 qL$ ,  $X_4 = -1/15 qL$ ,  $Y_4 = 9/20 qL$ ,  $M_4 = 1/45 qL^2$

2. Tracer les diagrammes de N, T, M

3. Déterminer la rotation en 3

## 9. Hyperstaticité interne - Portique à travée articulée



La structure S est un portique à 3 barres ABCD d'inertie constante  $I$ , A et D sont reliées par une traverse de section S articulée aux extrémités. Les barres sont élancées et de module d'Young  $E$ .

Les effets des efforts tranchant et normal seront négligés devant celui du moment fléchissant.

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de cette structure

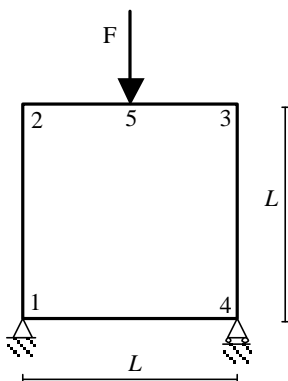
2. Tracer le diagramme du moment fléchissant

3. Déterminer la flèche en F

## 10. Portique – Méthode des 3 moments

La structure étudiée est un portique 1234 à 4 barres en béton armé encastrées entre elles. La section des barres supposées homogènes est carrée de côté  $a$ .

$E = 3 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $f_t = f_c = 45 \text{ MPa}$ , coefficient global de sécurité :  $s = 3$ ,  $F = 100 \text{ kN}$ ,  $L = 3 \text{ m}$



1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de cette structure

2. Isoler et faire l'inventaire des efforts sur les trois poutres 12, 23 et 34. Calculer les moments aux nœuds par la méthode des 3 moments

3. Tracer les diagrammes des efforts intérieurs

4. Après avoir justifié le fait de négliger les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal devant celui du moment fléchissant, dimensionner ce cadre

5. Calculer le déplacement vertical en 5

6. Calculer les déplacements et la rotation en 2

Rép. :  $a = 27.4 \text{ cm}$ ,  $y_5 = 4.5 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_2 \gg 0$ ,  $w_2 = -15 \cdot 10^{-4} \text{ rd}$

## 11. Examen de première session 2000

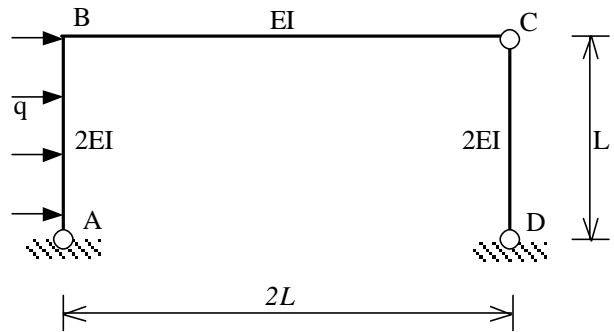
Dans tout le problème, les influences de l'effort tranchant et de l'effort normal sont négligées devant celui du moment fléchissant.

### Exercice 1 - Etude d'un portique isostatique

Le portique ci-contre est constitué de deux poteaux d'inertie double de la traverse.

Le matériau de module d'Young  $E$  est le même sur toute la structure.

La traverse est encadrée en  $B$  et articulée en  $C$ . Les 2 poteaux sont articulés en  $A$  et  $D$ .

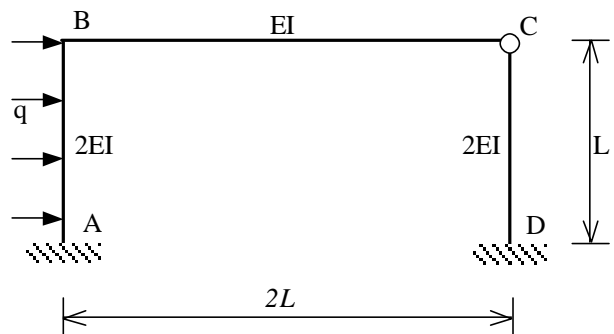


1. Démontrer que cette structure est isostatique
2. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant  $T$  et du moment fléchissant  $M$  sur la structure. Montrer que la dérivée du moment fléchissant le long de  $AB$  est nulle en  $B$ .
3. Calculer le déplacement horizontal  $U_C^0$  du point  $C$ .
4. Calculer la rotation  $\theta_B^0$  du point  $B$ .

### Exercice 2 - Etude d'un portique hyperstatique

Le portique précédent est maintenant encadré en  $A$  et  $D$ . Notons  $S$  cette structure.

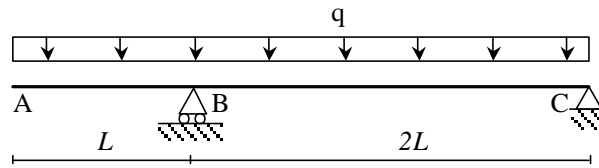
1. Quel est le degré d'hyperstaticité  $h$  de la structure  $S$  ?
2. Tracer la structure isostatique  $S_0$  associée à la structure  $S$ . Faire apparaître les inconnues hyperstatiques que l'on notera  $X_i$  avec  $i=1..h$
3. Décomposer le chargement appliqué à  $S$  en  $h+1$  chargements et déterminer dans chaque cas le diagramme du moment fléchissant, soit un diagramme  $M_0$  et  $h$  diagrammes  $M_i$  (charges unitaires).
4. Ecrire les conditions de compatibilité permettant de déterminer les  $h$  inconnues hyperstatiques  $X_i$ , en déduire le système linéaire satisfait par les  $h$  inconnues hyperstatiques  $X_i$ .
5. Déterminer les  $h$  inconnues hyperstatiques  $X_i$ .
6. Calcul du déplacement horizontal  $U_C$ . Pour cela, il vous est proposé d'utiliser le principe de superposition.
  - a. Ecrire le théorème de la charge unité permettant de déterminer  $U_C$ . Précisez clairement quels sont les moments intervenant dans ce théorème (structure, chargement).
  - b. Calculer  $U_C$ .



## 12. Examen de seconde session 2003

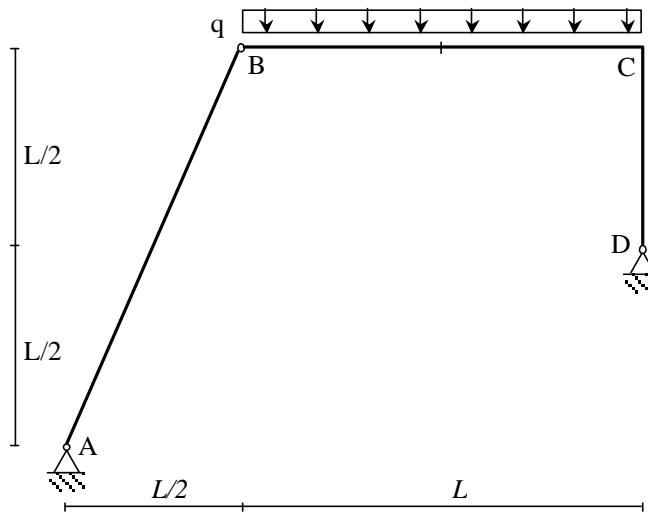
1. Tracer l'allure du moment fléchissant et en préciser les valeurs caractéristiques dans les structures isostatiques suivantes:

a. Poutre-console



b. Portique à jambage (barres identiques)

Dans cet exercice on indiquera la valeur du moment fléchissant en C et au milieu E de la traverse [BC].

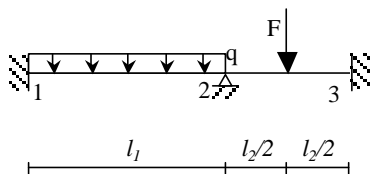


2. Calculer, pour le portique précédent, le déplacement horizontal  $u_c$  en C.

3. Un appui simple est ajouté en A sur la poutre console précédente, calculer la réaction d'appui en A.

## 13. Poutres hyperstatiques – Méthode des déplacements

Exercice 12.1

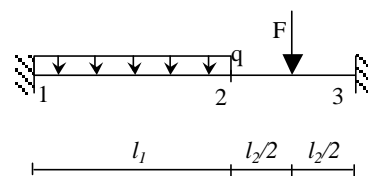


$F=60\text{kN}$ ,  $q=18\text{ kN/m}$ ,  $l_1=8\text{ m}$ ,  $l_2=6\text{ m}$

$E=210\text{ Gpa}$ ,  $I=5/12\ 10^{-5}\ \text{m}^4$

1. Déterminer les actions de liaison
2. Déterminer la rotation en 2
3. Tracer les diagrammes de N, T et M

Exercice 12.2.



Mêmes données et questions que pour l'exercice 12.1

Exercice 12.3

Mêmes données et questions que pour l'exercice 12.1 mais l'appui simple en 2 est remplacé par un ressort de raideur  $k=EI/l^3$  avec  $l=1\text{ m}$ .

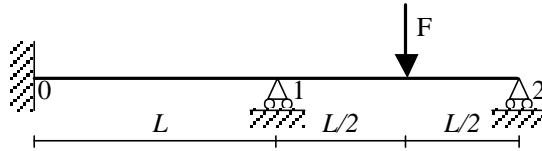
Exercice 12.4

Résoudre l'exercice 5.4 par la méthode des déplacements.

## 14. Examen de première session 2001

La structure  $S$  étudiée est constituée d'une poutre de module d'Young  $E$ , d'inertie  $I$ . L'effet de l'effort tranchant sera négligé.

Les trois exercices sont indépendants.



### Exercice 1 - Méthode des forces

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de cette structure.
2. Tracer la structure isostatique  $S_0$  associée à la structure  $S$ . Décomposer le chargement appliqué à  $S$  en  $h+1$  chargements faisant apparaître les inconnues hyperstatiques que l'on notera  $Y_i$  avec  $i=1..h$ .
3. Déterminer dans chaque cas de chargement le diagramme du moment fléchissant, soit un diagramme  $M_0$  et  $h$  diagrammes  $M_i$  (charges unitaires).
4. Ecrire les conditions de compatibilité permettant de déterminer les  $h$  inconnues hyperstatiques  $Y_i$ . Déterminer les  $h$  inconnues hyperstatiques  $Y_i$ .
5. Tracer le diagramme de l'effort tranchant le long de  $S$ .
6. Tracer le diagramme du moment fléchissant le long de  $S$ .
7. Par l'application du PTV, déterminer les rotations aux appuis 1 et 2,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

### Exercice 2 - Théorème des trois moments

1. Déterminer les moments aux appuis 0 et 1,  $M_0$  et  $M_1$ .
2. Tracer le diagramme de l'effort tranchant le long de  $S$ .
3. Tracer le diagramme du moment fléchissant le long de  $S$ .
4. Déterminer les réactions aux appuis 1 et 2,  $Y_1$  et  $Y_2$ .
5. Par l'application du PTV, déterminer les rotations aux appuis 1 et 2,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

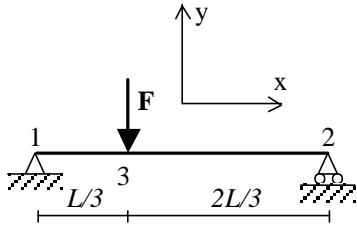
### Exercice 3 - Méthode des déplacements

1. Quels sont les paramètres cinématiques de  $S$  ?
2. Ecrire les relations de comportement permettant de déterminer les paramètres cinématiques.
3. Après l'écriture des relations d'équilibre adéquates, déterminer les paramètres cinématiques.
4. Déterminer les forces et moments aux extrémités des barres 01 et 12.
5. Tracer le diagramme de l'effort tranchant le long de  $S$ .
6. Tracer le diagramme du moment fléchissant le long de  $S$ .
7. Déterminer les réactions aux appuis 1 et 2,  $Y_1$  et  $Y_2$ .

## 15. Examen de première session 2002

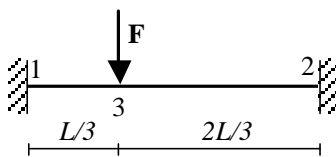
Les applications numériques seront effectuées quand cela est demandé.  $L=5\text{m}$  ;  $F=10\text{ kN}$  ;  $E=200\text{ GPa}$  ;  $I=1000\text{ cm}^4$

### Exercice 1 – Poutre isostatique



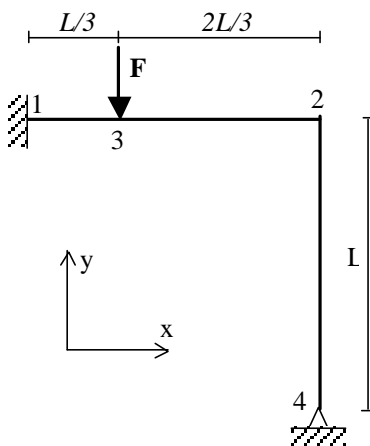
1. Tracer les diagrammes des efforts intérieurs N, T et M.
2. Déterminer  $y_3$ , la flèche en 3 par application du PTV.
3. Déterminer les rotations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par application du PTV.
4. AN : calculer le moment maximum  $M_{\max}$ ,  $y_3$  et  $\omega_1$ .

### Exercice 2 – Poutre hyperstatique



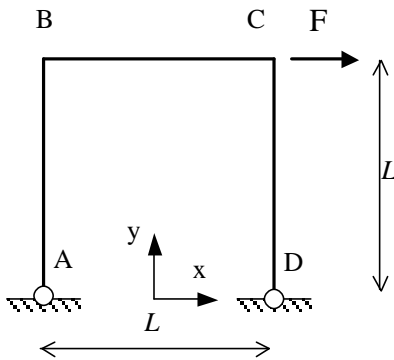
1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de cette structure.
2. Utiliser les résultats précédents pour déterminer  $M_1$  et  $M_2$ , les moments des encastremets sur la poutre (méthode des forces).
3. Déterminer le moment fléchissant  $M_3$  en 3.
4. Tracer le diagramme du moment fléchissant.
5. AN : Calculer le moment fléchissant  $M_3$ .

### Exercice 3 – Portique hyperstatique



1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de cette structure.
2. *Les influences des efforts normaux et tranchants sont négligées*, déterminer les paramètres cinématiques principaux.
3. Ecrire les relations de comportement des barres.
4. Ecrire les équations d'équilibre nécessaires à la détermination des paramètres cinématiques.
5. Déterminer les paramètres cinématiques.
6. Tracer l'allure du diagramme du moment fléchissant.
7. Déterminer les efforts  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$  aux extrémités des barres.
8. Tracer les diagrammes de T et N.
9. AN: Calculer les rotations  $\omega_2$  et  $\omega_4$  et le moment fléchissant  $M_3$ .

## 16. Examen de première session 2003



La structure  $S$  ABCD est un portique d'inertie constante  $I$ , de module d'Young  $E$ , constitué d'une poutre et de poteaux d'élancement important.

$S$  est articulée en  $A$  et  $D$ , elle est soumise à une force concentrée d'intensité  $F$  en  $C$ .

Les effets des efforts tranchant et normal seront négligés devant celui du moment fléchissant.

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

### Exercice 1 - Questions préliminaires

1. Quel est le degré d'hyperstaticité de cette structure.
2. Justifier l'hypothèse consistant à négliger les effets de l'effort normal et de l'effort tranchant devant celui du moment fléchissant.

### Exercice 2 - Méthode des forces

L'inconnue hyperstatique choisie pour le calcul de cette structure est  $X_D$ , la force horizontale en  $D$ .

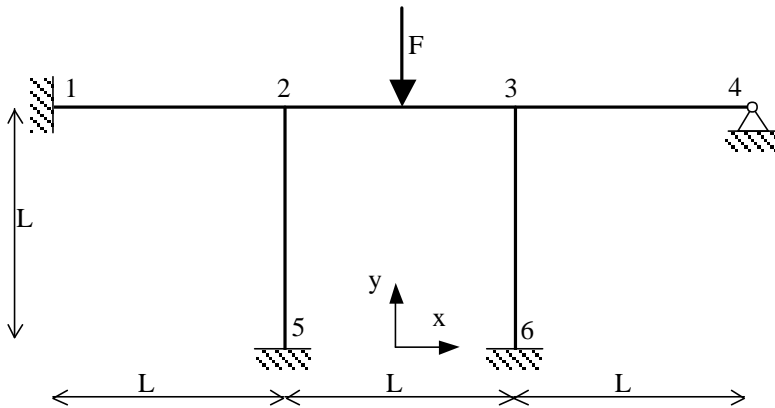
1. Tracer la structure isostatique  $S_0$  associée à  $S$ , décomposer le problème en une superposition de problèmes associés à la structure  $S_0$ , écrire la condition de compatibilité cinématique.
2. Démontrer que  $X_D = -F/2$
3. Calculer  $U_C$ , le déplacement horizontal en  $C$ .
4. Tracer le diagramme du moment fléchissant sur  $S$ .

### Exercice 3 - Méthode des déplacements

1. Soient  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  les rotations en  $A, B, C$  et  $D$ . Justifier que  $\omega_A = \omega_D$  ainsi que  $\omega_B = \omega_C$ . Déterminer les paramètres cinématiques principaux de  $S$ .
2. Ecrire les relations de comportement utiles à la détermination des paramètres cinématiques principaux.
3. Ecrire les équations d'équilibre associées à chacun des paramètres cinématiques principaux.
4. Calculer les paramètres cinématiques principaux.
5. Tracer le diagramme du moment fléchissant sur  $S$ .



## 17. Examen de première session 2004



La structure ci-contre est constituée de poutres identiques d'élancement important et d'inertie constante  $EI$ .

S articulée en 4 et est encadrée en 1, 5 et 6. S est soumise à une force d'intensité  $F$  au milieu de 23.

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Les effets des efforts tranchant et normal seront négligés devant celui du moment fléchissant.

### Exercice 1 - Questions préliminaires

1. Quel est le degré d'hyperstaticité de cette structure.
2. Justifier l'hypothèse consistant à négliger les effets de l'effort normal et de l'effort tranchant.

### Exercice 2 - Méthode des déplacements

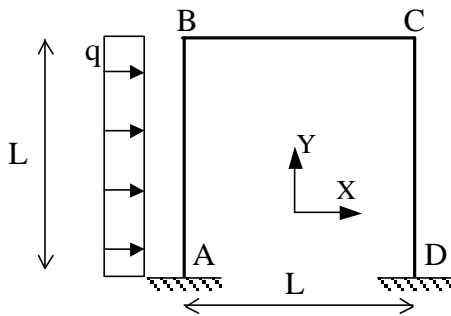
1. Déterminer les paramètres cinématiques principaux de S.
2. Ecrire les relations de comportement utiles à la détermination des paramètres cinématiques principaux.
3. Ecrire les équations d'équilibre associées à chacun des paramètres cinématiques principaux et calculer ceux-ci.
4. Déterminer les moments et efforts tranchants aux extrémités des barres utiles au tracé du diagramme du moment fléchissant.
5. Tracer le diagramme du moment fléchissant sur la poutre 1234 seule.

### Exercice 2 - Méthode des forces

Pour simplifier l'étude, seule la poutre continue 1234 est analysée. Le résultat obtenu sera donc une approximation car il revient à négliger les moments transmis par les poteaux sur la poutre.

1. Justifier sur le plan cinématique l'hypothèse consistant à étudier la poutre en considérant que les deux poteaux 52 et 63 peuvent être remplacés par deux appuis simples en 2 et 3.
2. Prenons les réactions aux appuis 2, 3 et 4 comme inconnues hyperstatiques. Ecrire le problème à résoudre en utilisant le principe de superposition (ne pas résoudre).
3. Déterminer les moments aux appuis par la méthode des trois moments.
4. Déterminer les réactions aux appuis.
5. Tracer le diagramme du moment fléchissant sur la poutre 1234. L'approximation est-elle valable ?

## 18. Examen de première session 2005



La structure S (ABCD) ci-contre est constituée de poutres identiques d'élanement important et d'inertie constante  $EI$ , elle est soumise à une force répartie d'intensité  $q$  sur AB.

Exercice 1 - Questions préliminaires

1. Quel est le degré d'hyperstaticité de cette structure.
2. Justifier les hypothèses H1 et H2 consistant à négliger les effets de l'effort tranchant (H1) et de l'effort normal (H2).

Exercice 2 - Méthode des déplacements

1. Déterminer les paramètres cinématiques non nuls de S.
2. Compte-tenu de H2, déterminer les paramètres cinématiques principaux de S.

Pour la suite, on utilisera la méthode a. ou b.

a. Par la méthode classique

3. Ecrire les équations d'équilibre associées à chacun des paramètres cinématiques principaux.
4. Ecrire les relations de comportement utiles à la détermination des paramètres cinématiques principaux.

b. Par la méthode canonique (matricielle)

Seules les contributions associées aux paramètres cinématiques principaux seront prises en compte.

3. Ecrire, dans la base globale, les matrices de rigidité des barres (rappel : la traction est négligée).
4. Déterminer le vecteur forces global, assembler la matrice de rigidité globale.

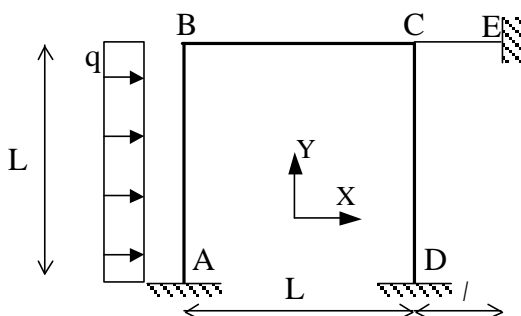
Retour aux questions communes

5. Calculer les paramètres cinématiques principaux.
6. Calculer aux extrémités des barres :
  - a. les moments  $M_{ij}$
  - b. les forces transverses  $T_{ij}$
  - c. les forces axiales  $N_{ij}$

Rappel H2 : les relations de comportement des barres en traction ne peuvent pas être utilisées pour 6.c.

7. Tracer les diagrammes des efforts normal, tranchant et du moment fléchissant dans la structure.

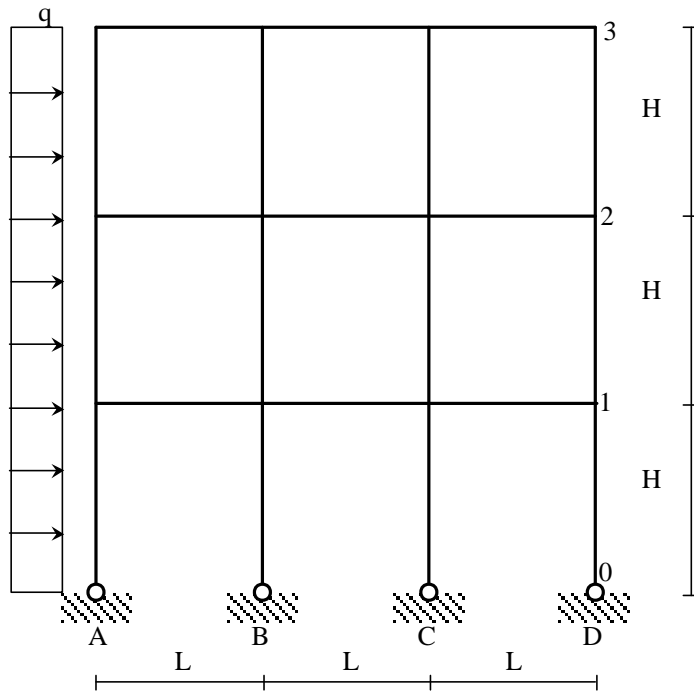
Exercice 3 – Question supplémentaire



Pour rigidifier la structure, on rajoute une barre CE de longueur  $l$  de section  $S$ , de raideur  $E$  et d'inertie en flexion suffisante pour qu'elle ne flambe pas.

1. Justifier l'hypothèse consistant à considérer que cette barre travaille essentiellement en traction-compression ?
2. Déterminer la nouvelle matrice de rigidité globale.
3. On suppose que  $S/l = 24I/L^3$ . Déterminer les paramètres cinématiques principaux de S

## 19. Bâtiment industriel (examen IUP-GCI Toulouse)



Un bâtiment industriel possède une structure en poteaux-planchers. On étudie son comportement sous l'action du vent, modélisé par une force transversale uniformément répartie.

Dans le plan principal, le schéma de fonctionnement du bâtiment est une structure poutres-poteaux comportant quatre files de poteaux (notées A, B, C et D) et trois planchers (notés 1, 2 et 3).

Les pieds de poteaux sont articulés dans leur fondation (au niveau 0). Les travées ont toutes la même longueur L et les poteaux tous la même hauteur H.

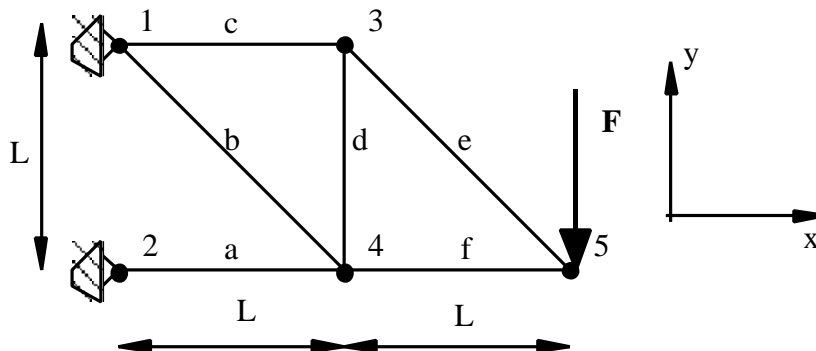
Le module de flexion des poteaux est notée EI. Celui des poutres (modélisant la rigidité des planchers) est supposé infiniment plus fort, il est noté  $EI_{\infty} = \infty$ .

Les déformations d'effort normal et d'effort tranchant sont négligées.

1. A priori, combien y a-t-il de degrés de liberté ?
2. Isoler une poutre de plancher quelconque, faire le bilan des déplacements des extrémités et montrer que, compte-tenu de  $EI_{\infty} = \infty$ , les rotations sont nulles.
3. A posteriori, combien reste-t-il de degrés de liberté ?
4. Montrer que – pour un étage donné – les moments nodaux sont les mêmes aux extrémités des poteaux des files B, C et D.
5. Pourquoi différent-ils dans la file A ?
6. Exprimer la valeur des moments nodaux en fonction du déplacement des planchers notés  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  et – éventuellement – de la force appliquée.
7. Par application du PTV dans des champs de vitesse virtuels rigidifiants par morceau, établir trois équations d'équilibre entre moments nodaux et forces appliquées.
8. Etablir la matrice de rigidité de l'ossature.
9. Calculer les déplacements  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ .
10. Calculer les rotations  $\omega_A$  et  $\omega_B = \omega_C = \omega_D$  des pieds de poteaux.
11. Calculer les moments nodaux uniquement en fonction de la charge de vent.
12. Tracer les diagrammes M, T et N dans l'ossature.

## 20. Structure en treillis

La structure suivante est constituée de barres de même matériau (module d'Young  $E$ ), de section  $S$  (sauf les barres obliques qui ont une section  $\sqrt{2} S$ ). Les masses sont négligées.



### Exercice 1 - Structure isostatique

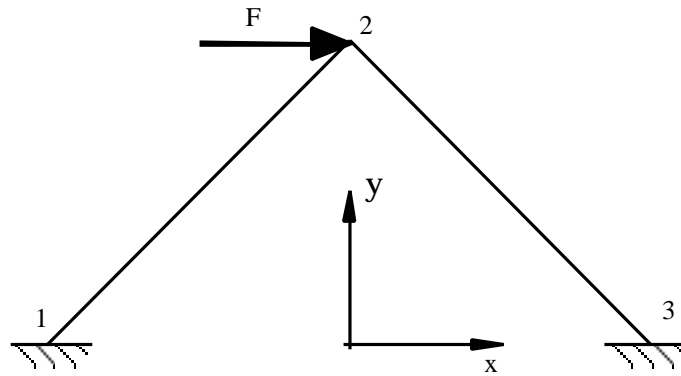
1. Montrer qu'une barre non pesante articulée à ses deux extrémités est nécessairement soumise à de la tension-compression.
2. Déterminer le degré d'hyperstaticité de cette structure.
3. Déterminer les efforts dans les barres.
4. Déterminer le déplacement vertical du point 5 avec le PTV.
5. Déterminer les déplacements de tous les nœuds ainsi que les réactions aux appuis.

### Exercice 2 - Structure hyperstatique

On rajoute une barre  $g$  entre les nœuds 2 et 3 (section  $\sqrt{2} S$ ).

1. Déterminer le degré d'hyperstaticité de la nouvelle structure.
2. Déterminer la matrice de rigidité globale du système.
3. Quels sont les degrés de libertés indéterminés ?
4. Déterminer le vecteur forces.
5. Déterminer les déplacements de tous les nœuds ainsi que les réactions aux appuis en résolvant les équations canoniques (matricielles) de la méthode des déplacements

## 21. Influence de la flexion dans les treillis



La structure schématisée sur la figure ci-dessus est constituée de deux poutres identiques encastrees à leurs extrémités entre elles en 2 et sur un massif en 1 et 3. Les poutres sont de section carrée de coté  $a$ , de module d'Young  $E$  et de longueur  $L$ .

### Exercice 1 - Structure isostatique

On décide de modifier la modélisation en supposant que les poutres sont articulées à leurs extrémités. Déterminer le déplacement du point 2 ainsi que les actions de liaison par résolution du système d'équations donné par l'écriture canonique (matricielle) de la méthode des déplacements

### Exercice 2 - Structure hyperstatique

On prend en compte maintenant les encastremets aux extrémités des barres.

1. Déterminer le déplacement du point 2 ainsi que les actions de liaison.
2. Démontrer que si les poutres sont élancées ( $a \ll L$ ), l'effet de la flexion sur la réponse de la structure est du second ordre devant celui de la traction.