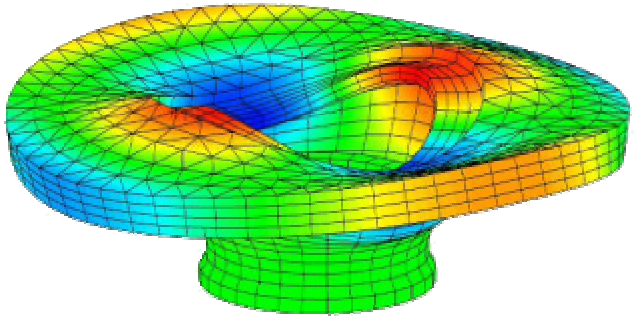
MÉCANIQUE DES STRUCTURES

MS5:COMPLEMENTS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES
LES MODES PROPRES CONCENTRENT L'INFO



Programme Mécanique II - Mécanique des Structures 2004-2005

MS1 (02/12): Les méthodes énergétiques: Des méthodes « éclair » pour calculer des poutres à liaisons multiples

- TD 1(02/12):Pont-Stade de France

MS2(10/12) :Structures complexes: les éléments finis simplifient les calculs

- TD2(10/12) :Arbre d'alternateur

MS3(16/12) :Plaques :du 3D au 2D

- TD3(16/12) :Etage cryogénique d'Ariane V: Plaque de révolution en flexion

MS4(06/01) : le flambement :un exemple d'instabilité

- TD4(06/01) :Flambement par dilatation des rails de chemin de fer

MS5 (13/01):Vibrations des structures (compléments): les modes propres concentrent l'info

- TD5(13/01) :Réponse dynamique d'un poteau de basket
  Etude dynamique d'un arbre d'alternateur

MS5:COMPLEMENTS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES
LES MODES PROPRES CONCENTRENT L'INFO

1.THEOREME DES PUISSANCES VIRTUELLES POUR UN SOLIDE ELASTIQUE

2.PRINCIPE DE HAMILTON (pm)

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

4.VIBRATION DES SYSTEMES CONTINUS: PERFORMANCES DES ELEMENTS FINIS

- **Poutre en TC**
- **Poutre en flexion**
- **Différentes CL, chargements,FRF**
- **Généralisation**

ETUDE de CAS

1.THEOREME DES PUISSANCES VIRTUELLES POUR UN SOLIDE ELASTIQUE

-Solide élastique linéaire

-Petits mouvements autour d ’une position d’équilibre

-Les forces sont réparties à la frontière :

théorème des travaux(puissances) virtuelles

si w est un champ cinématiquement admissible:

$$-dU + dW_{ext} = 0$$

$$\int_{\Omega} \mathrm{Tr}\,(\mathbf{s}\,(\mathbf{u}).\mathbf{e}(\mathbf{w}))\,dV = \int_{\Omega} (-\rho\,\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})\,dV + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_v, \mathbf{w})\,dV + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f}_S, \mathbf{w})\,dS$$

On discrétise les déplacements(réels et virtuels) suivant un nombre fini de :

-fonctions de base w_j,

-associées à un vecteur q_j de coordonnées généralisées

(éléments finis ,déformées hypothétiques,ou expérimentales…..)

1.THEOREME DES PUISSANCES VIRTUELLES POUR UN SOLIDE ELASTIQUE

$$\int_{\Omega} \mathrm{Tr}\,(\mathbf{s}\,(\mathbf{u}).\mathbf{e}(\mathbf{w}))\,dV = \int_{\Omega} (-\rho\,\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})\,dV + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_v, \mathbf{w})\,dV + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f}_S, \mathbf{w})\,dS$$

$$\boxed{\mathbf{u}(x) = [\mathbf{W}]\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{w}_j(x)\,q_j = \begin{bmatrix} \cdots \mathbf{w}_j \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ q_j \\ \vdots \end{bmatrix}}$$

espace **temps**

$$\int_{\Omega} \mathrm{Tr}(\mathbf{s}\,(w_j q_j).\mathbf{e}(w_i \underline{q}_i))\,dV = \int_{\Omega} (-w_j \ddot{q}_j, w_i \underline{q}_i)\,dV + \int_{\Omega} (\mathbf{f}_v, w_i \underline{q}_i)\,dV + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f}_S, w_i \underline{q}_i)\,dS$$

1.THEOREME DES PUISSANCES VIRTUELLES POUR UN SOLIDE ELASTIQUE

$$\int_{\Omega} \mathrm{Tr}(\mathbf{s}(w_j q_j).\mathbf{e}(w_i \underline{q}_i))dV = \int_{\Omega}(-w_j \ddot{q}_j, w_i \underline{q}_i)dV + \int_{\Omega}(\mathbf{f}_v, w_i \underline{q}_i)dV + \int_{\partial\Omega}(\mathbf{f}_S, w_i \underline{q}_i)dS$$

$$\mathbf{u}(x) = [\mathbf{W}]q = [\cdots \mathbf{w}_j \cdots]\begin{bmatrix} \vdots \\ q_j \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad {}^t\mathbf{w}(x) = {}^t\underline{q}\,{}^t[\mathbf{W}] = {}^t\underline{q}\begin{bmatrix} \vdots \\ w_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad {}^t\underline{q} = [\cdots \underline{q}_i \cdots]$$

$${}^t\underline{q}\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \int_{\Omega}\mathrm{Tr}(\sigma(w_j).\varepsilon(w_i))dV & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \\ q_j \\ \vdots \end{bmatrix} + {}^t\underline{q}\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \int_{\Omega}\rho w_j\, w_i dV & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \\ \ddot{q}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = {}^t\underline{q}\begin{bmatrix} \vdots \\ \int_{\partial\Omega}(f_S, w_i)dS \\ \vdots \end{bmatrix} + \ldots$$

$${}^t\underline{\mathbf{q}}\mathbf{K}\mathbf{q} + {}^t\underline{\mathbf{q}}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = {}^t\underline{\mathbf{q}}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}$$

1.THEOREME DES PUISSANCES VIRTUELLES POUR UN SOLIDE ELASTIQUE

Second membre:

$$\boxed{\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ F_n \\ \vdots \end{bmatrix}, F_n = \int_{\Omega} (\mathbf{f}_V, \mathbf{w}_n) dV + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f}_S, \mathbf{w}_n) dSt}$$

. La modélisation en éléments finis **reporte** donc les forces extérieures éventuellement réparties dans le volume ou à la surface du solide **en un ensemble de forces équivalentes associées aux coordonnées généralisées qi**

On applique quelquefois **directement** les forces aux nœuds du maillage

2.PRINCIPE DE HAMILTON

À voir dans le poly

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

$$\mathbf{u} = [\mathbf{w}]\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{w}_j q_j$$

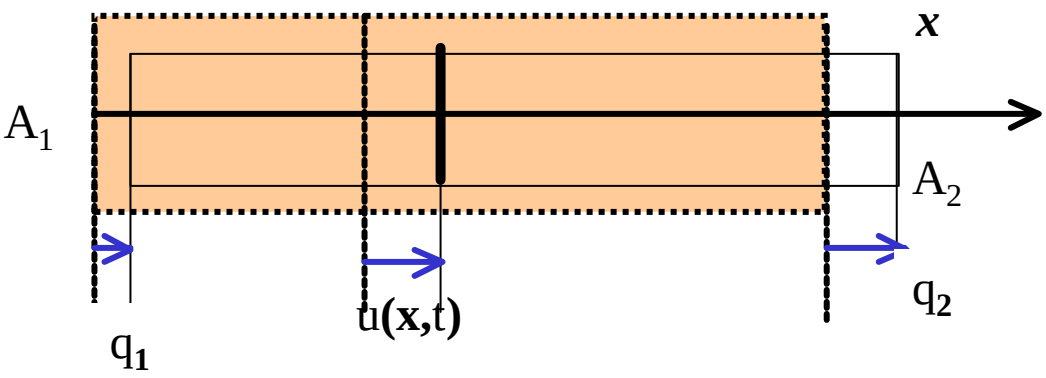
$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{w}_i(\mathbf{x}), \mathbf{w}_j(\mathbf{x}))\, dV$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left[\mathrm{Tr}\ \mathbf{s}(\mathbf{w}_i) . \mathbf{e}(\mathbf{w}_j) \right] dv$$

Intégrale volumique(3D),linéique(poutre),surfacique(plaque,coque)

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application 1 :barre en traction -compression



$$u(x)=q_1\left(1-\frac{x}{l}\right)+q_2\frac{x}{l}=q_1w_1(x)+q_2w_2(x),$$

$$\text{où } w_1(x)=\left(1-\frac{x}{l}\right),\text{et } w_2(x)=\frac{x}{l}$$

Matrice de masse:

$$T=\frac{1}{2}\,{}^{t}\dot{\mathbf{q}}\;\mathbf{M}\;\dot{\mathbf{q}}$$

$$M_{ij}=\int_{\Omega}\rho w_i(x)w_j(x)dV$$

$$\mathbf{M}=\rho S\int_0^L\begin{bmatrix}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2 & \frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\\ \frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right)^2\end{bmatrix}dx$$

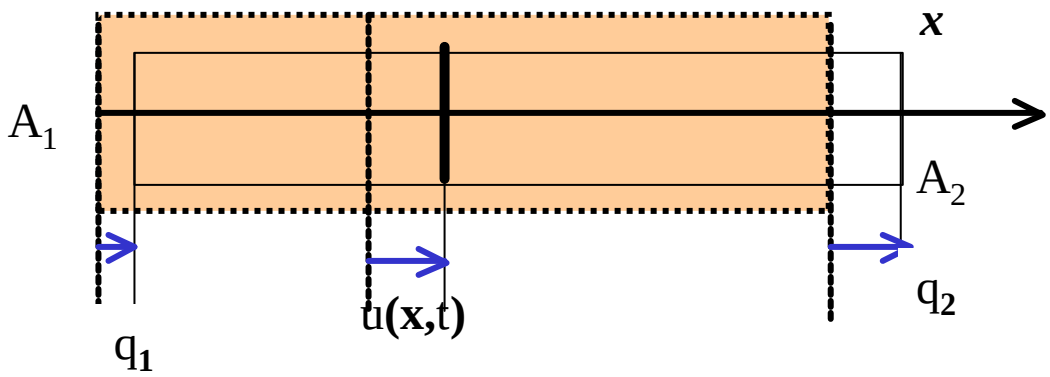
$$M=\frac{\rho SL}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{m}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application 1:barre en traction -compression

$$u(x)=q_1(1-\frac{x}{l})+q_2\frac{x}{l}=q_1w_1(x)+q_2w_2(x),$$

$$\text{où } w_1(x)=(1-\frac{x}{l}),\text{et } w_2(x)=\frac{x}{l}$$



Matrice de rigidité

$$U=\frac{ES}{2}\int_0^L[q_1,q_2]\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}(w_1)\\ \varepsilon_{11}(w_2)\end{bmatrix}[\varepsilon_{11}(w_1)\varepsilon_{11}(w_2)]\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}dx\varepsilon$$

$$K=ES\int_0^L\begin{bmatrix}\left(-\frac{1}{L}\right)\left(-\frac{1}{L}\right) & \left(\frac{1}{L}\right)\left(-\frac{1}{L}\right)\\ \left(\frac{1}{L}\right)\left(-\frac{1}{L}\right) & \left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right)\end{bmatrix}dx$$

$$K=\frac{ES}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application1 :barre en traction -compresssion

$$M=\frac{\rho SL}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{m}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$K=\frac{ES}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

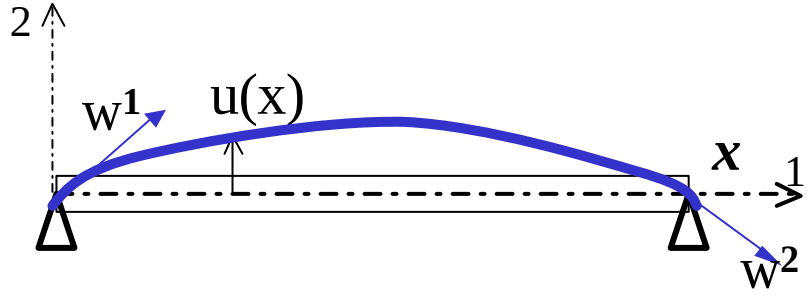
Ex:Combien de modes peut-on calculer avec un élément:

Pour une poutre encastée-libre?

Pour une poutre libre-libre?

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application 2 :poutre en flexion(Euler-Bernoulli)



$$q = \begin{bmatrix} u^1 \\ w^1 \\ u^2 \\ w^2 \end{bmatrix},$$

$$u(x) = [w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x)]\, q = [\mathbf{W}(x)]\, q$$

Matrice de masse:

$$T = \frac{1}{2}\, {}^t\dot{\mathbf{q}}\, \mathbf{M}\, \dot{\mathbf{q}}$$

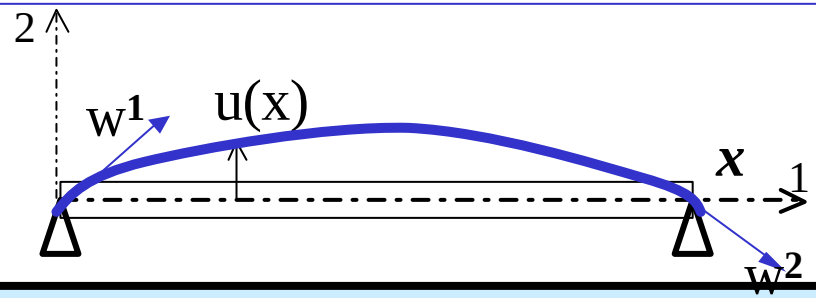
$$M = \left[\int_0^L \rho S\, {}^t[\mathbf{W}][\mathbf{W}]\, dx \right],$$

$$M_{ij} = \int_\Omega \rho w_i(x) w_j(x)\, dV$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{m}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\boldsymbol{L} & 54 & -13\boldsymbol{L} \\ & 4\boldsymbol{L}^2 & 13\boldsymbol{L} & -3\boldsymbol{L}^2 \\ & & 156 & -22\boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{sym} & & & 4\boldsymbol{L}^2 \end{bmatrix}$$

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application 2 :poutre en flexion(Euler-Bernoulli)



$$q = \begin{bmatrix} u^1 \\ w^1 \\ u^2 \\ w^2 \end{bmatrix}, \quad u(x) = [w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x)]\, q = [W(x)]\, q$$

Matrice de rigidité

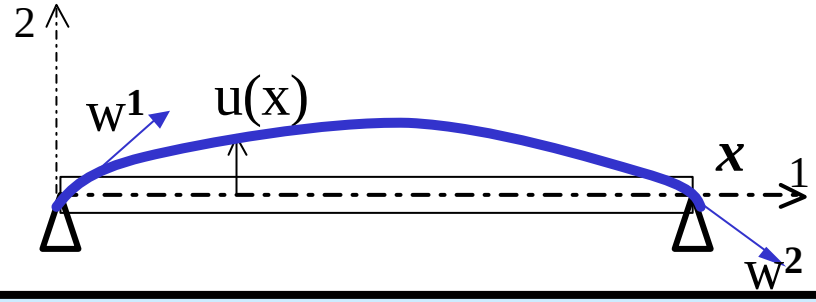
$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) ds$$

$$K = EI\int_0^L {}^t[W''(x)][W''(x)]\,dx$$

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_2^1 \\ \leftarrow \omega_3^1 \\ \leftarrow u_2^2 \\ \leftarrow \omega_3^2 \end{matrix}$$

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application 2 :poutre en flexion(Euler-Bernoulli)



$$q = \begin{bmatrix} u^1 \\ \omega^1 \\ u^2 \\ \omega^2 \end{bmatrix},$$

$$u(x) = [w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x)]q = [\mathbf{W}(x)]q$$

Matrice de rigidité

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_2^1 \\ \leftarrow \omega_3^1 \\ \leftarrow u_2^2 \\ \leftarrow \omega_3^2 \end{matrix}$$

Matrice de masse:

$$M = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Application:poutre en flexion(Euler-Bernoulli)

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2^1 \\ w_3^1 \\ u_2^2 \\ w_3^2 \end{matrix}$$

Matrice de rigidité

$$M = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de masse:

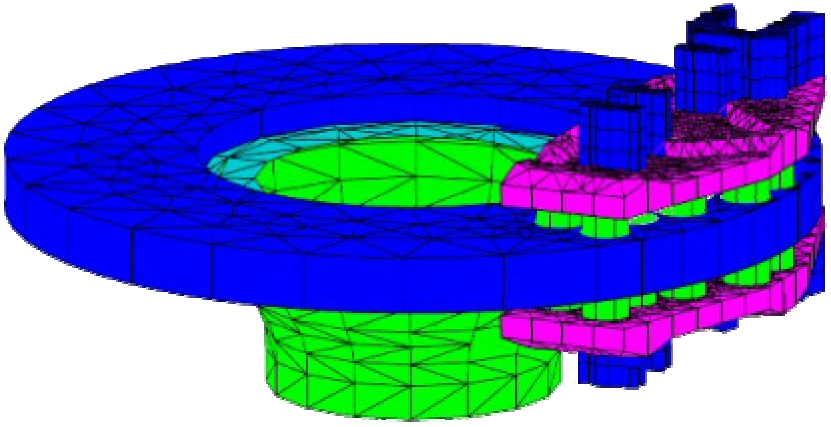
Exemples: calcul du premier mode propre en flexion d'une poutre encastrée,

$$M' = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$K' = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2^2 \\ w_3^2 \end{matrix}$$

3.MATRICES DE MASSE ET RIGIDITE

Et pour une structure complexe (assemblage de structures simples-éléments finis) ?



$$T = \frac{1}{2}\,{}^{t}\dot{\mathbf{q}}\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$$

$$U = \frac{1}{2}\,{}^{t}\mathbf{q}\mathbf{K}\mathbf{q}$$

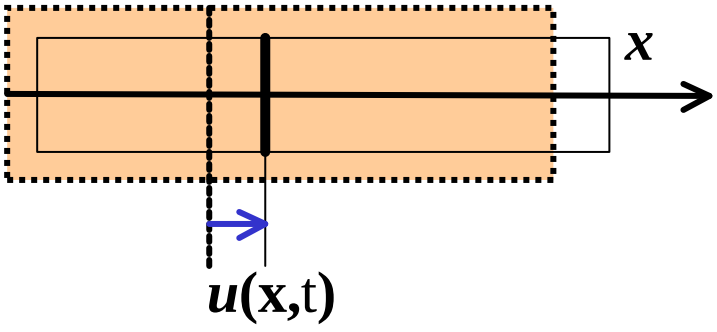
Les mêmes règles d ’assemblage s ’appliquent pour les matrices de masse et de rigidité

4.1.Barre en traction-compression.

4.1.1Mise en équations(rappel)

s_{11}

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



$$u(x,t)=U(x)e^{j\omega t}$$

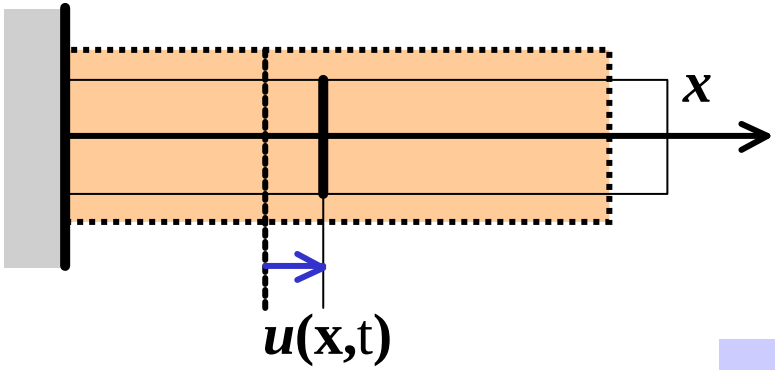
$$E\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\rho\omega^2U(x)=0$$

si $k=\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$,

$$U(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

4.1.2 Barre en traction-compression:

barre encastrée-libre et approximation par éléments finis



$$k=\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}},\quad U(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

CL

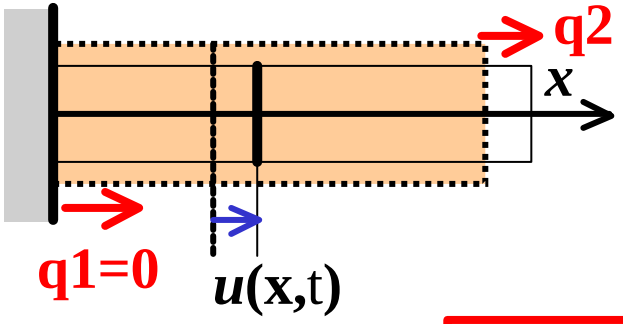
$$u(x=0)=0,\quad \text{soit}\quad A=0$$

$$\sigma_{11}(x=L)=0,\quad \text{soit}\quad Bk\cos(kL)=0$$

$$\boxed{\omega_n\sqrt{\frac{\rho}{E}}L=(2n-1)\frac{\pi}{2},\ \text{et}\ U_n=B\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2L}x\right),\ n\geq 1}$$

4.1.2 Barre en traction-compression:

barre encastrée-libre et approximation par éléments finis



$$\left[-\omega^2 \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{ES}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left[-\omega^2 \frac{m}{6} 2 + \frac{ES}{L}\right] q_2 = 0, \quad \text{soit} \quad \omega^2 = \frac{3E}{\rho L^2},}$$

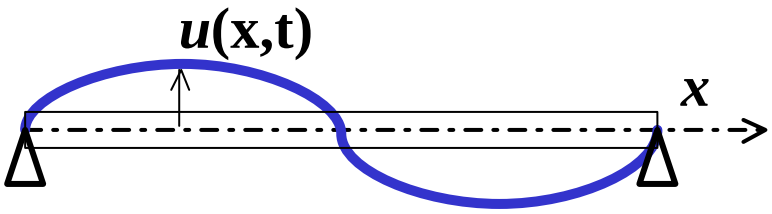
Solution exacte:

$$\boxed{\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{\pi^2}{4}\frac{E}{\rho L^2} = 2.46\,\frac{E}{\rho L^2}}$$

4.2.Poutre en flexion.

4.2.1.Mise en équations-CL



$$\boxed{EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)+\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=0}$$

$$u(x,t)=U(x)\cos(\omega t+\varphi)$$

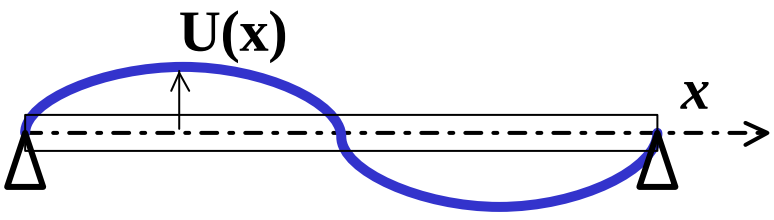
$$U(x)=U_0 e^{\frac{kx}{L}}$$

$$\boxed{EI\left(\frac{k}{L}\right)^4-\omega^2\rho S=0,\quad \text{soit: } \omega^2=\left(\frac{k}{L}\right)^4\frac{EI}{\rho S}}$$

Solution générale:

$$\boxed{U(x)=A\cos\left(\frac{kx}{L}\right)+B\sin\left(\frac{kx}{L}\right)+C\,\mathrm{ch}\left(\frac{kx}{L}\right)+D\,\mathrm{sh}\left(\frac{kx}{L}\right)}$$

4.2.2 Poutre en flexion simplement appuyée



CL:
U(0) =0, M(0)=0
U(L =0, M(L)=0

$$M = EI\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$$

Les CL conduisent à sink=0, k=np

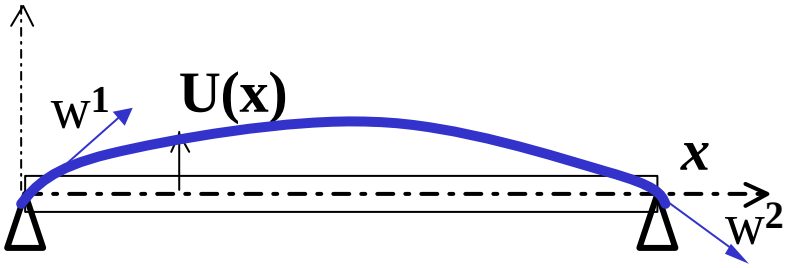
$$\omega^2 = \left(\frac{k}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S}$$

$$f_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\,\frac{n^2\pi}{2L^2}$$

Déformée modale:

$$U_n = U_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n \geq 1$$

4.2.2 Poutre en flexion simplement appuyée: approximation EF



1 élément poutre de longueur L

Conditions limites:
$u(0)=u^1=0$, $u(L)=u^2=0$
Inconnues: rotations w^1 ,w^2

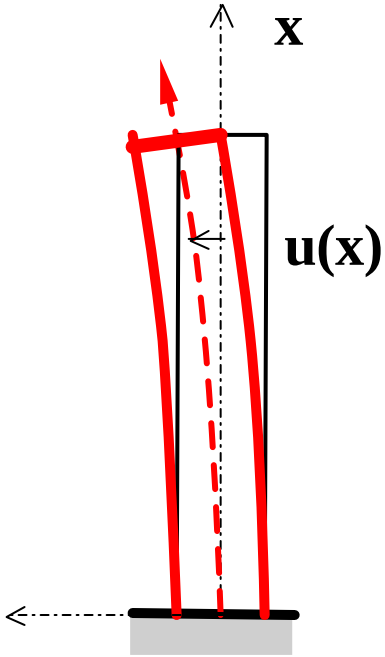
$$K=\frac{EI}{L^3}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ & & 12 & 6L\\ \text{sym} & & & 4L^2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\leftarrow u_2^1\\ \leftarrow \omega_3^1\\ \leftarrow u_2^2\\ \leftarrow \omega_3^2\end{array}$$

$$K'=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}4L^2 & 2L^2\\ 2L^2 & 4L^2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow \omega_3^1\\ \leftarrow \omega_3^2\end{array}$$

$$M=\frac{m}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 54 & 13L\\ & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ & & 156 & 22L\\ \text{sym} & & & 4L^2\end{bmatrix}$$

$$M'=\frac{m}{420}\begin{bmatrix}4L^2 & -3L\\ -3L & 4L^2\end{bmatrix}$$

4.2.3 Poutre en flexion:autres CL:Poutre encastrée-libre



Modèle 1 élément fini: pale ou mât

Conditions aux limites: $u(0)=u^1=0, du/ds(0)= w^1=0$

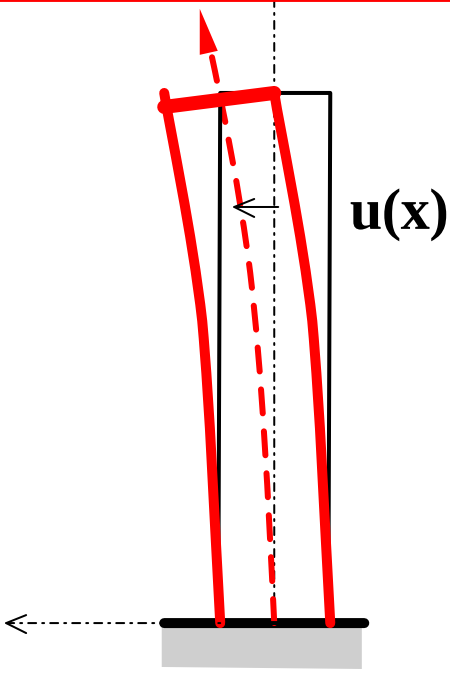
Inconnues: $u(L)=u2, du/ds(L)= w^2$

4.VIBRATION DES SYSTEMES CONTINUS: PERFORMANCES DES ELEMENTS FINIS

4.2.3 Poutre en flexion:autres CL:Poutre encastrée-libre

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_2^1 \\ \leftarrow w_3^1 \\ \leftarrow u_2^2 \\ \leftarrow w_3^2 \end{matrix}$$

$$M = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$



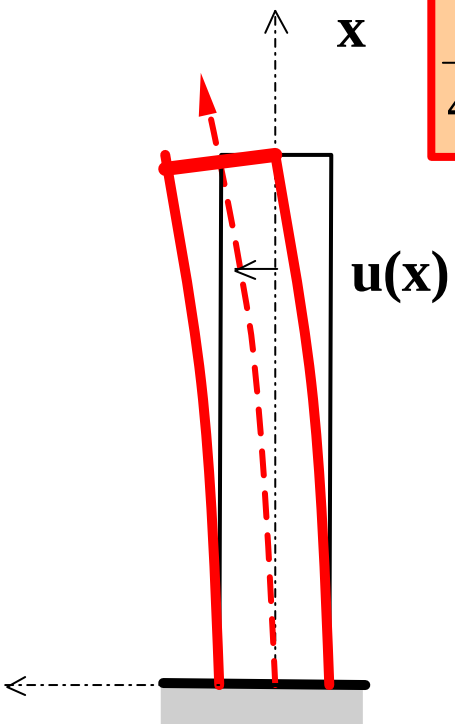
Matrice de masse:

$$M' = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité

$$K' = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_2^2 \\ \leftarrow \omega_3^2 \end{matrix}$$

4.2.3 Poutre en flexion:autres CL:Poutre encastrée-libre



$$\frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}^2 \\ \ddot{\omega}^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^2 \\ \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Solutions:

$$\omega_1^2 = 12{,}47\frac{EI}{\rho SL^4}$$

$$\omega_2^2 = 1211{,}3\frac{EI}{\rho SL^4}$$

Solutions "exactes" système continu

$$\omega_1^2 = 12{,}36\frac{EI}{\rho SL^4}$$

$$\omega_2^2 = 485{,}5\frac{EI}{\rho SL^4}$$

Seule la première FP est bien approximée, AVEC 1 ELEMENT!

4.3 Poutre en flexion/excitation spatiale variable dans le temps

- **Idée:**

projeter sur les modes propres, comme en dimension finie

- **Outil:**

Théorème des puissances virtuelles(TPV)

- **Pourquoi ça marche:**

Les modes propres sont orthogonaux par rapport aux opérateurs (que l'on va définir) de masse et rigidité:découplage des équations

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Opérateurs de masse et rigidité

Définition des opérateurs de masse et rigidité

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)+\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=f(x,t)$$

TTV:f(x,t)=0

$u(x,t)=n(x)e^{jwt}$

$$\int_0^L EI\frac{d^4U(x)}{dx^4}v(x)dx-\omega^2\int_0^L \rho SU(x)v(x)dx=0$$

Opérateurs de masse et rigidité:

$$\boxed{<\mathbf{v},\mathbf{KU}>-\omega^2<\mathbf{v},\mathbf{MU}>=0}$$

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Opérateurs de masse et rigidité

Opérateurs de masse et rigidité:

M et K symétriques et autoadjoints, il existe une base qui diagonalise simultanément M et K

$$<\mathbf{U_m},\mathbf{MU_n}>=<\mathbf{U_m},\mathbf{KU}_n>=0 \text{ si } m \neq n,$$

$$<\mathbf{U_n},\mathbf{KU_n}>=\omega_n^2<\mathbf{U_n},\mathbf{M}U_n>=\omega_n^2 m_n$$

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale

Développement/projection de la solution sur les modes

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\sum_{j=1}^{\infty}Y_j(\mathbf{x})q_j(t)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\rho S\ddot{q}_j(t)U_j(x)+EIq_j(t)\frac{\partial^4 U_j(x)}{\partial x^4}\right)=f(x,t)$$

Application du Théorème des travaux virtuels, chmp virt. $U_n(x)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\ddot{q}_j(t)\left(\int_0^L \rho S U_j(x)U_n(x)dx\right)+q_j(t)\left(\int_0^L EI\frac{\partial^4 U(x)}{\partial x^4}U_n(x)dx\right)\right\}=\int_0^L f(x,t)U_n(x)dx$$

$\langle U_n, Mu_j\rangle$ $\langle U_n, Ku_j\rangle$

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale

$$m_n\left[\ddot{q}_n(t)+\omega_n^2 q_n(t)\right]=\int_0^L U_n(x)f(x,t)dx,\ n=1,2...$$

Découplage des modes (dénombrables)

Projection de l 'excitation sur U_n: Mode d'autant plus excité que: Forces"spatialement appropriées" à la déformée du mode

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale

Cas d'une excitation ponctuelle: $f(x,t) = f_{x_0}\delta(x - x_0),.$

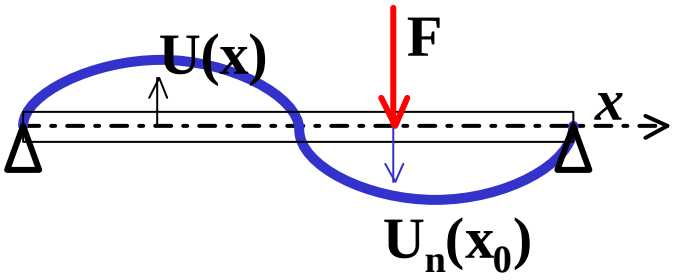
$$m_n\left[\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)\right] = U_n(x_0) f_{x_0}(t), n = 1,2..$$

En transformée de Fourier

$$m_n\left[-\omega^2 + \omega_n^2\right] Q_n(j\omega) = U_n(x_0) F_{x_0}(j\omega)$$

En redéveloppant: $U(x, j\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j(x) Q_j(j\omega)$

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale



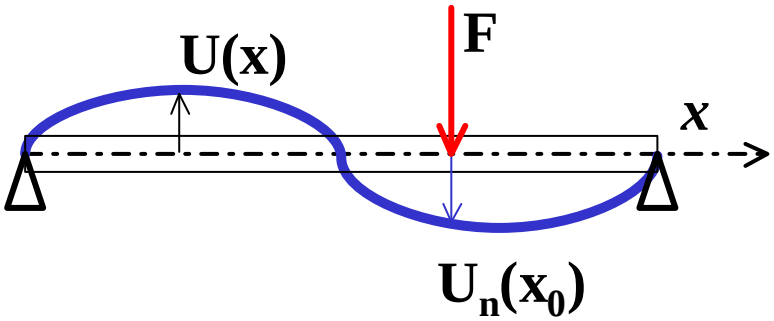
$$H(x, x_0, j\omega) = \frac{U(x, j\omega)}{F_{x_0}(j\omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x)U_n(x_0)}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

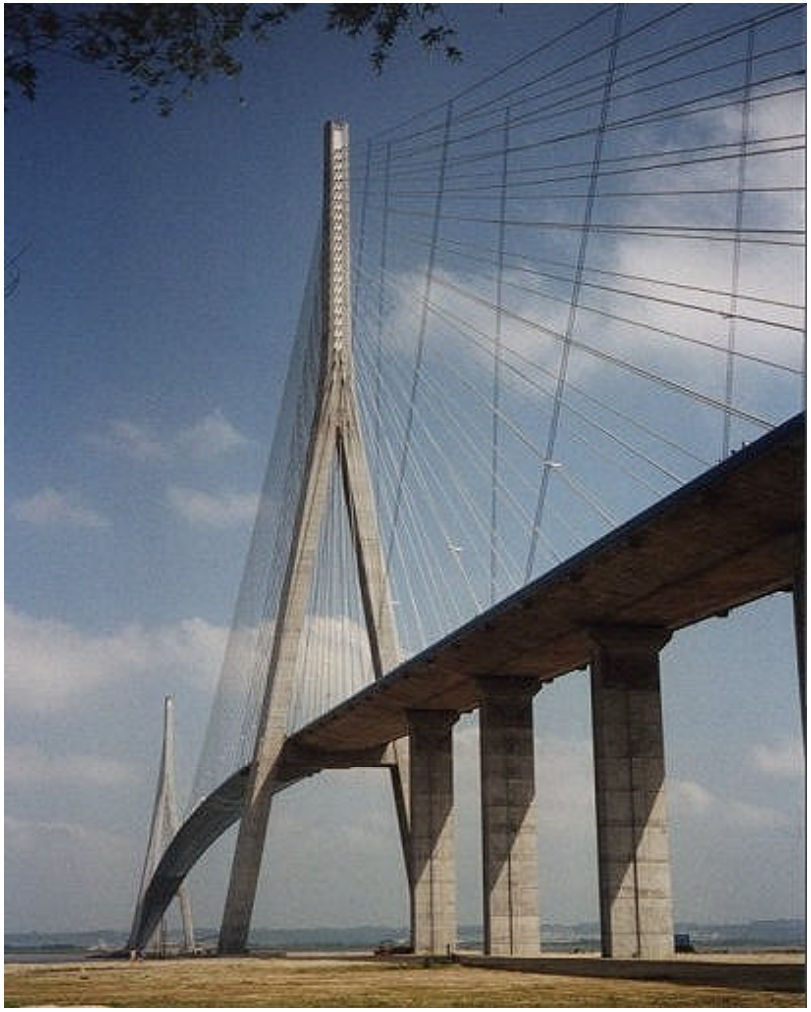
Réponse en fréquence :
FRF: x/x0

Réponse sur le mode n:
-proportionnelle à la déformée du mode n au point d'observation
-proportionnelle à la déformée du mode n au point d'excitation
-infinie(!!!) à la fréquence de résonance

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale

Exemple:Poutre en flexion simplement appuyée

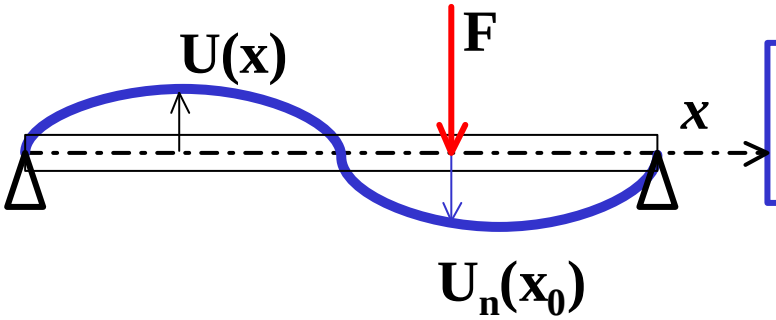




Exemple:
Réponse dynamique d'un pont
Mais valable pour sollicitation ponctuelle, harmonique…
Sinon , calculer les modes par EF et projeter….

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale

exemple: Poutre en flexion simplement appuyée



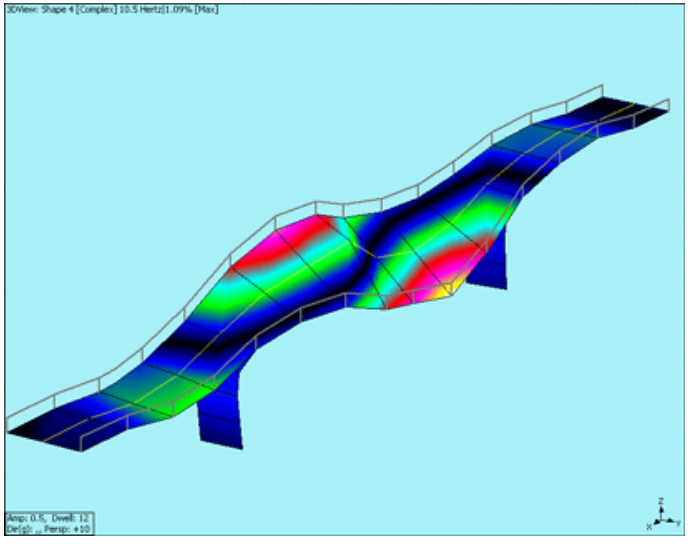
Fonction de transfert:réponse en x à une excitation en x0:

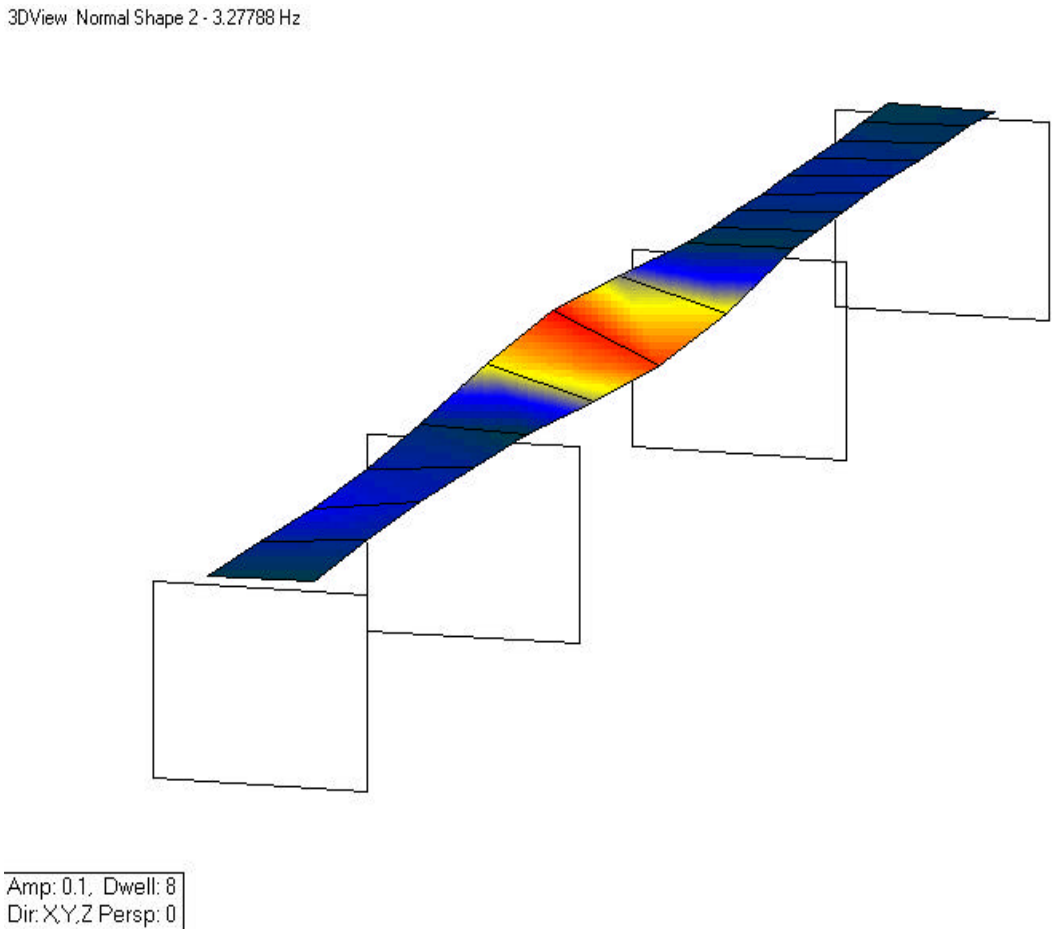
$$H(x,x_0,p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n(x)U_n(x_0)}{m_n(jw^2+w_n^2)}=\frac{2}{rSL}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{npx}{L}\sin\frac{npx_0}{L}}{p^2+\frac{EI}{rS}\left(\frac{np}{L}\right)^4}$$

FRF:p=jw

4.3 Poutre en flexion/excitation variable dans le temps. Réponse sur une base modale

exemple: Modèles de pont





4.4.Généralisation

4.4.1 opérateurs de masse et rigidité

$$< \mathbf{v}, \mathbf{Mu} >= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dV \quad \text{(pour un solide 3D)}$$

Opérateur de masse:

$$= \int_0^L \rho S(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx \quad \text{poutre}$$

Opérateur de rigidité:

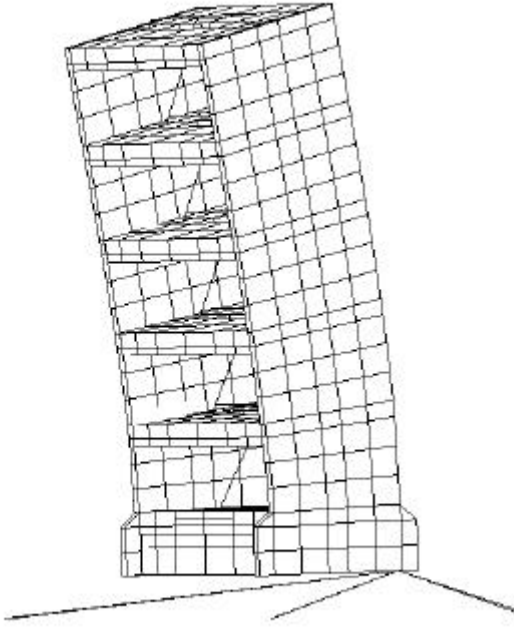
$$< \mathbf{v}, \mathbf{Ku} >= \int_{\Omega} \mathrm{Tr}(s(\mathbf{u}).\mathbf{e}(\mathbf{v}))dV, (\text{pour un solide 3D}) = \int_0^L EI \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} v(x)dx \quad \text{poutre}$$

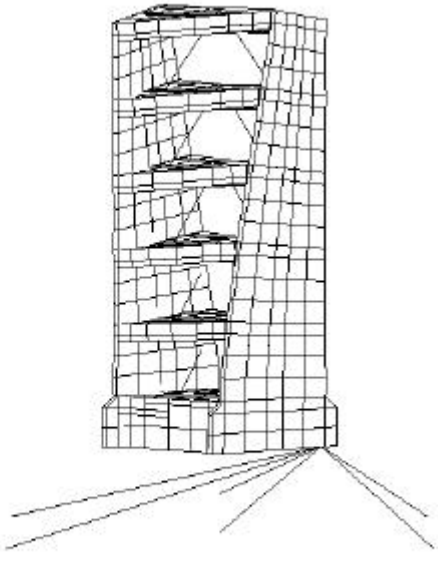
Il existe une infinité dénombrable de modes orthogonaux par rapport à M et K

$$< \mathbf{U_m}, \mathbf{MU_n} >=< \mathbf{U_m}, \mathbf{KU_n} >= 0 \text{ si } m \neq n,$$

$$< \mathbf{U_n}, \mathbf{KU_n} >= \omega_n^2 < \mathbf{U_n}, \mathbf{MU_n} >= \omega_n^2 m_n$$

4.4.Généralisation-EXEMPLES

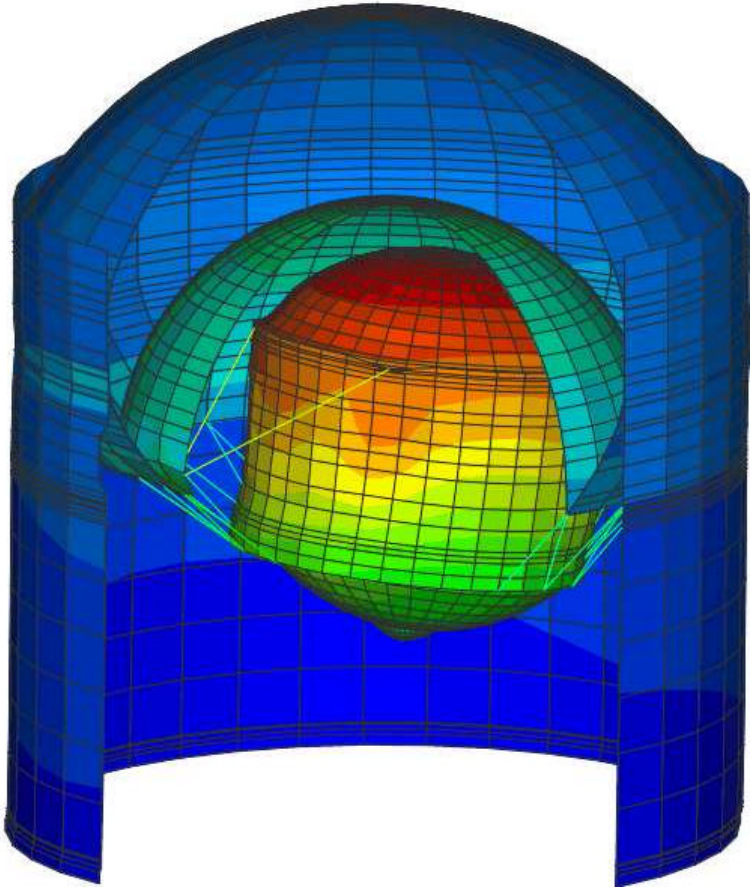




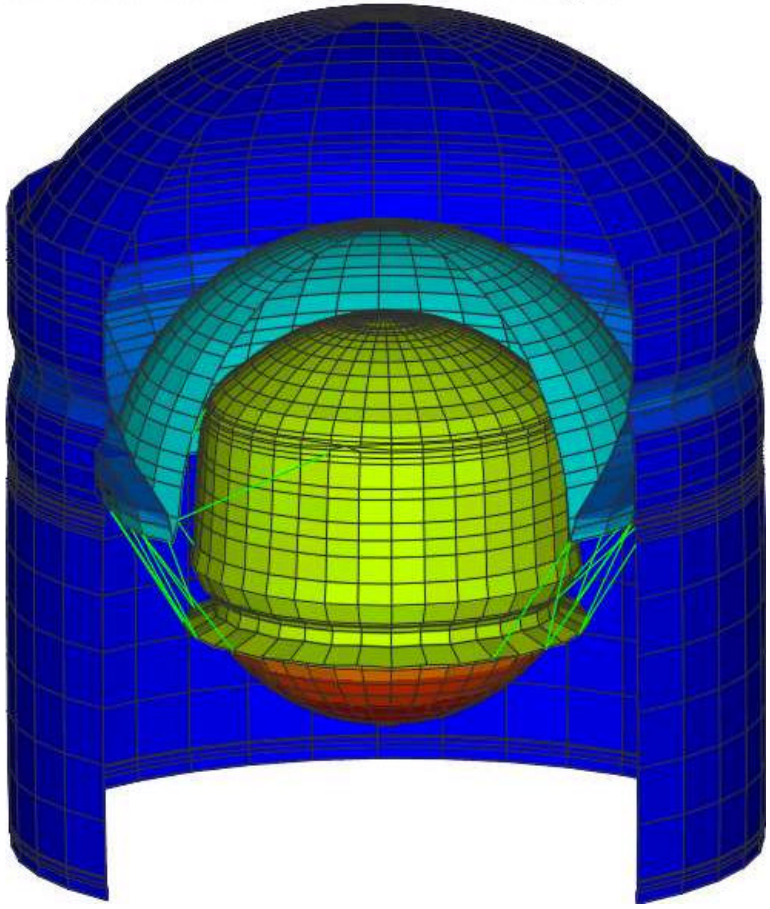
Modes propres d'une maquette de batiment

4.4.Généralisation-EXEMPLES

Etage Supérieur Cryotechnique ESC-A du lanceur A5E
Mode de basculement
Etude de la stabilité de l'ESC-A en vol

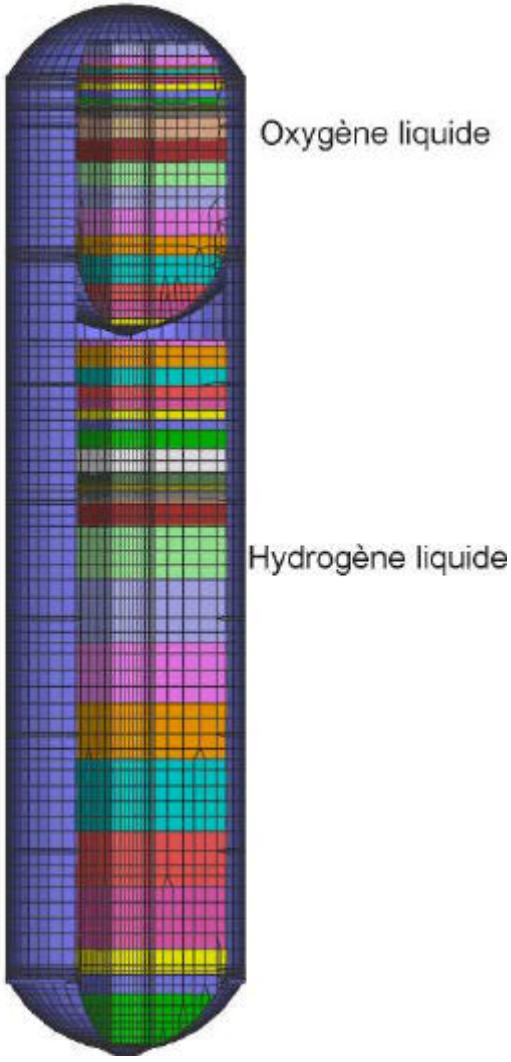


Etage Supérieur Cryotechnique ESC-A
du lanceur A5E
Mode longitudinal
Etude des oscillations de pression dans les ergols



4.4.Généralisation-EXEMPLES

Réservoir principal du lanceur A5E

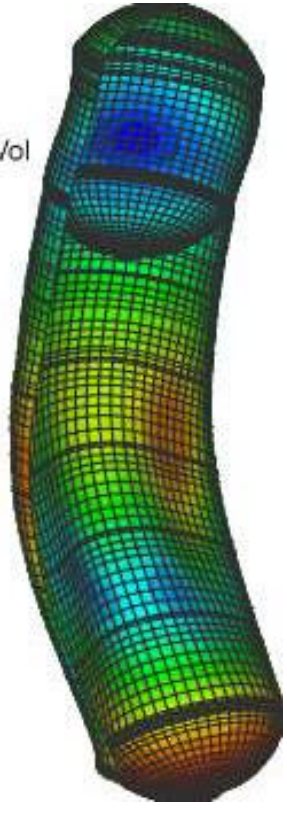


4.4.Généralisation-EXEMPLES

Réservoir principal du lanceur A5E

Mode de flexion

Etude de la stabilité du lanceur en Vol



Réservoir principal du lanceur A5E

Mode longitudinal

Etude des oscillations
de pression dans les ergols

4.4.Généralisation-EXEMPLES

La projection de la réponse sur les modes, et l'application du TPV au mode n donne:

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{U}_j(x) q_j(t)$$

En temporel:

$$m_n\left[\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)\right] = \int_{\partial\Omega} \mathbf{?}(\mathbf{x},t)\mathbf{U}_n(x)dS$$

Excitation ponctuelle

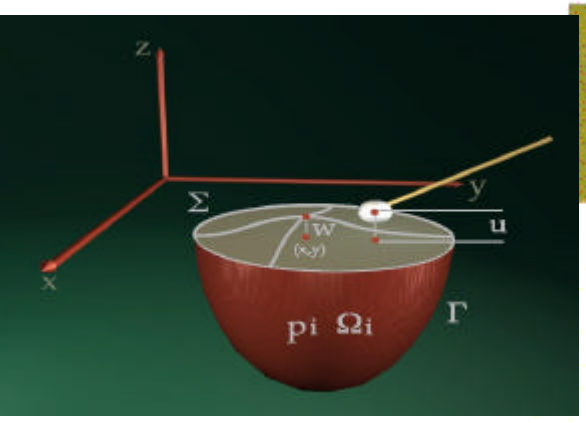
$$m_n\left[\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)\right] = Y_n(\mathbf{x})\mathbf{f}_{\mathbf{x_0}}(t), n = 1,2..$$

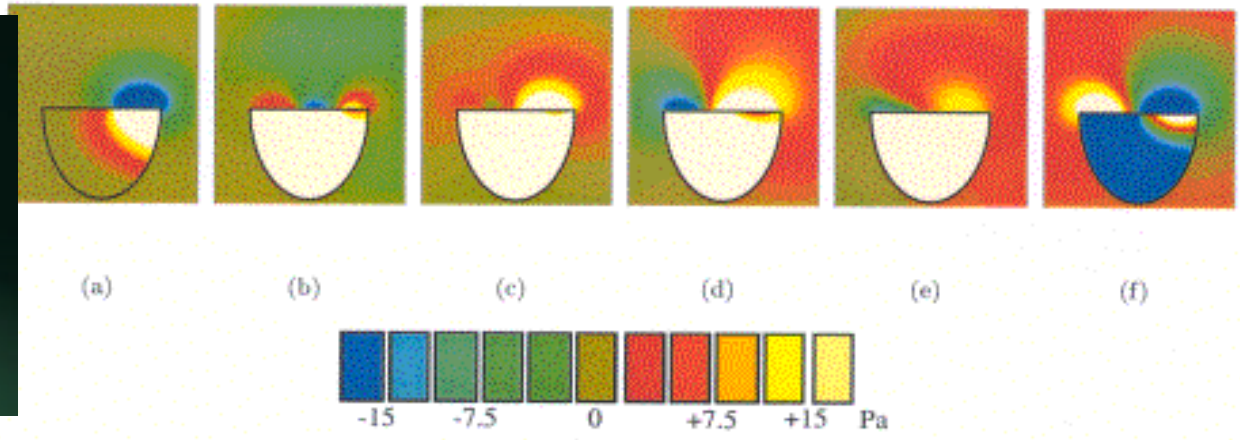
4.4.Généralisation-EXEMPLES

:la timbale:un exemple de couplage vibroacoustique

Excitation ponctuelle

$$\boxed{m_n\left[\ddot{q}_n(t)+\omega_n^2 q_n(t)\right]=\mathbf{U}_n(x)\mathbf{f}_{x_0}(t), n=1,2..}$$





4.4.Généralisation-EXEMPLES

FRF réponse en fréquence

$$H(x, x_0, j\omega) = \frac{U(x, j\omega)}{F_{x_0}(j\omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x)U_n(x_0)}{m_n(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)}$$

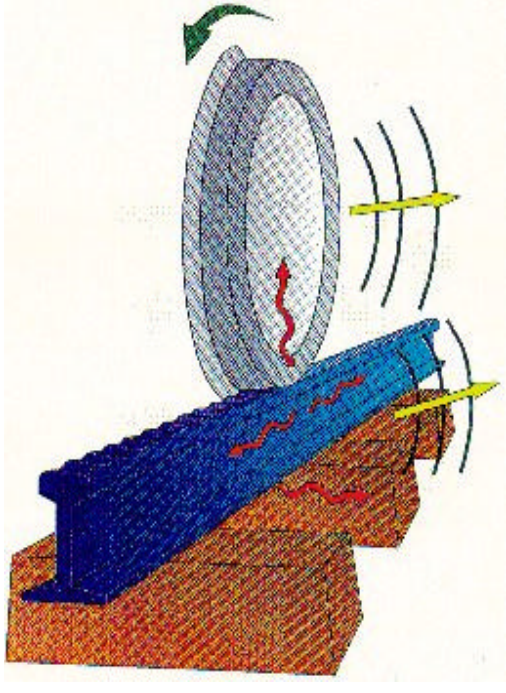
Ex FRF d'une caisse de voiture, roue…

Application:réduction du bruit de roulement des trains

- Le bruit de roulement :
  - **Développement du modèle TWINS (ERRI/UIC) 1990-1995**
  - **Modèle quantitatif (2/3dB(A)):**

Des défauts microscopiques(1-10 µm) excitent la roue et le rail

Des ondes/modes sont générés dans le rail

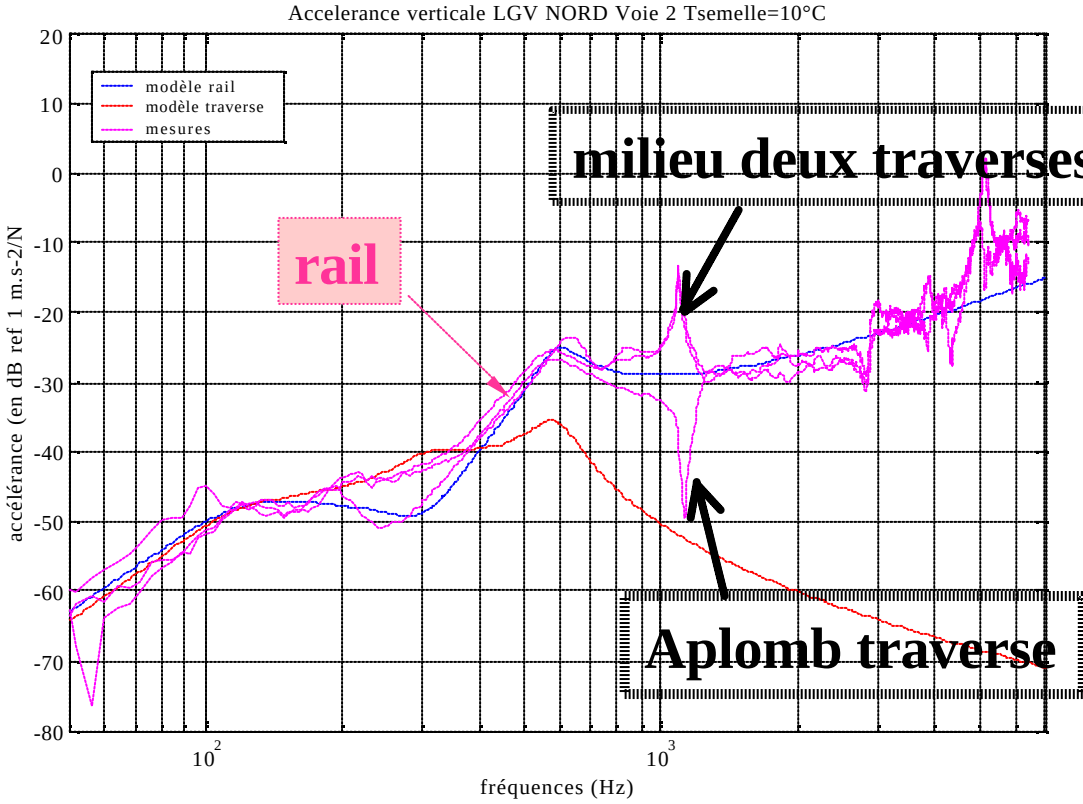


La roue résonne suivant ses modes propres (1600-4000Hz) et rayonne dana ce domaine de fréquences

Les traverses rayonnent autour de 400 Hz.

ETUDE de CAS

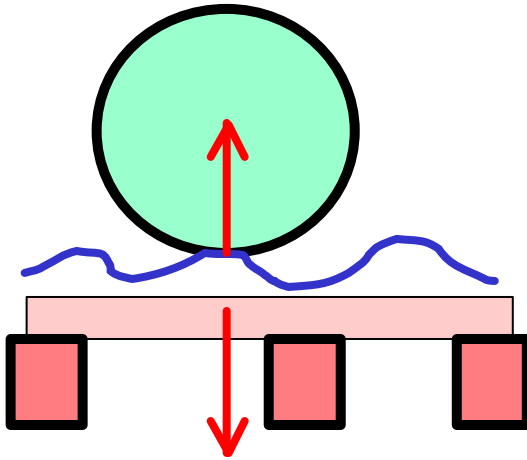
4pplication:réduction du bruit de roulement des trains :dynamique de la voie



ETUDE de CAS

– Bruit de roulement des trains:

– Parts relatives des contributions roue et voie

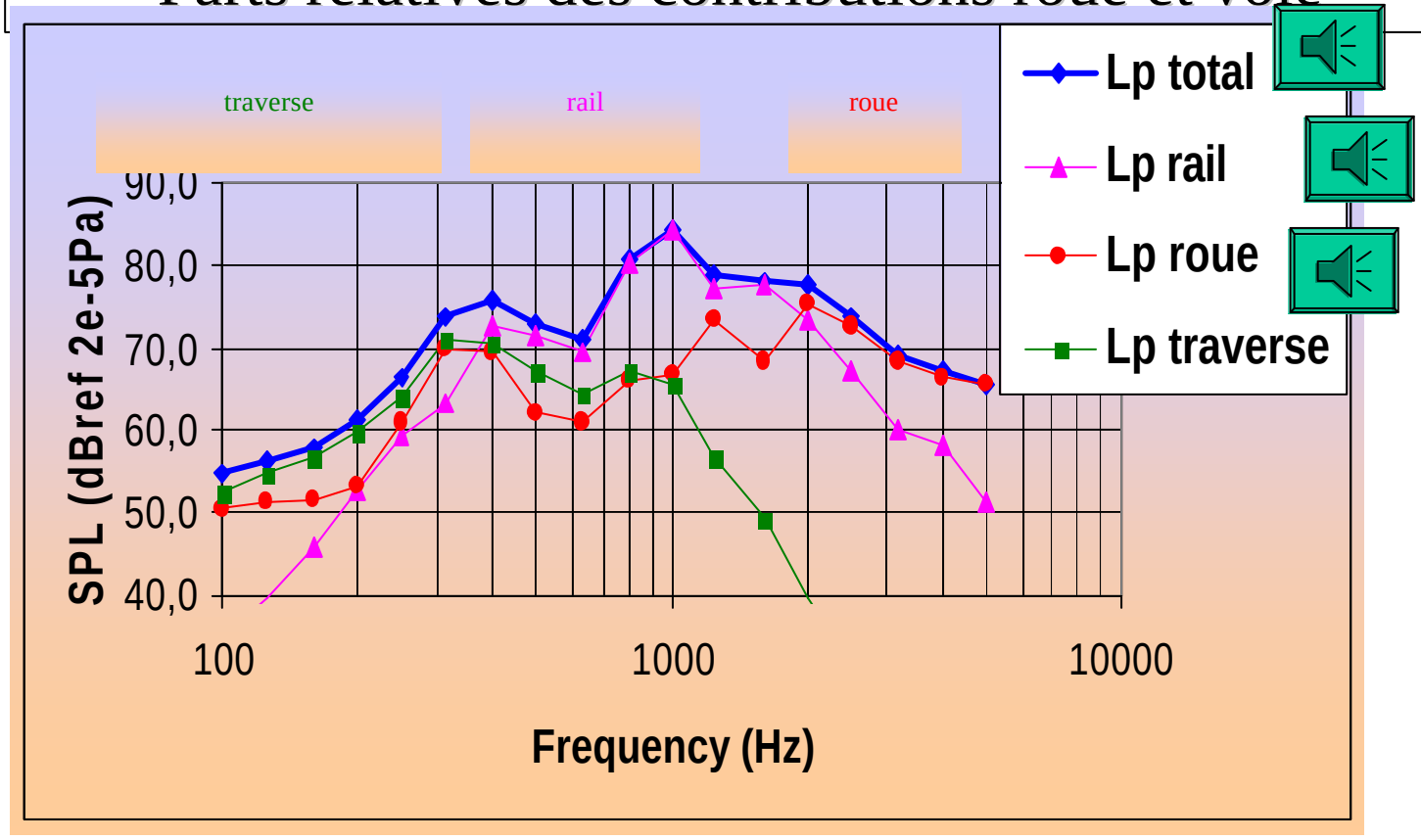


$$\frac{U(x,jw)}{F_{x_0}(jw)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x)U_n(x_0)}{m_n(-w^2 + 2jw\,z_n w_n + w_n^2)}$$

ETUDE de CAS

– Bruit de roulement des trains:

– Parts relatives des contributions roue et voie

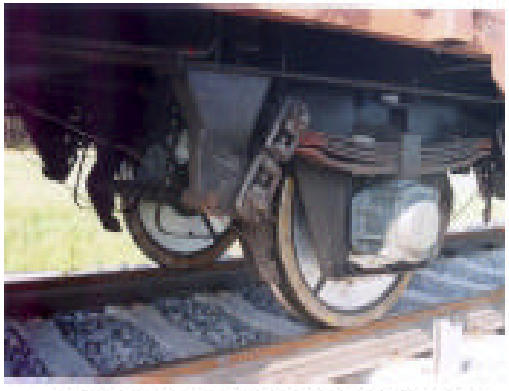


4. Application:réduction du bruit de roulement:modes propres d ’une roue de chemin de fer

$$H(x, x_0, jw) = \frac{U(x, jw)}{F_{x_0}(jw)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x) U_n(x_0)}{m_n(-w^2 + 2jw z_n w_n + w_n^2)}$$

Application à l ’optimisation acoustique de la roue

Perforated AD860F
with ring damper,
(ABB/CAF manufacture)



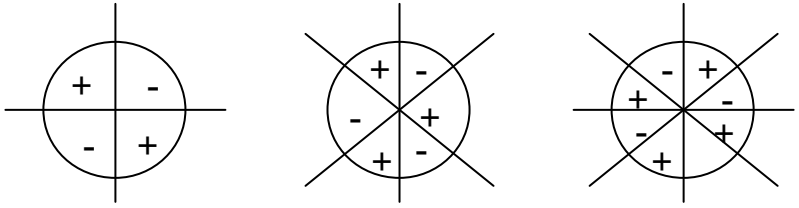
ISVR860F with Web Screens

(Valdunes manufacture)

ISVR 860F with Tuned
Absorber
(Valdunes manufacture)

ETUDE de CAS

Quelques exemples



n = 2 **n = 3** **n = 4**

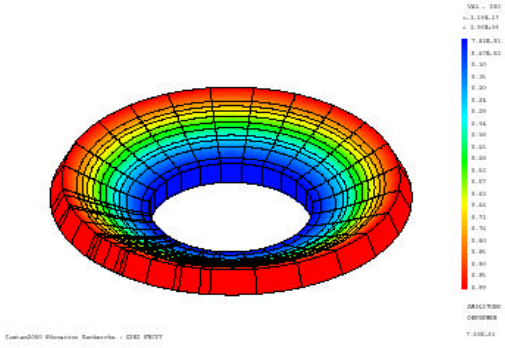


Figure 7.1: Mode 1

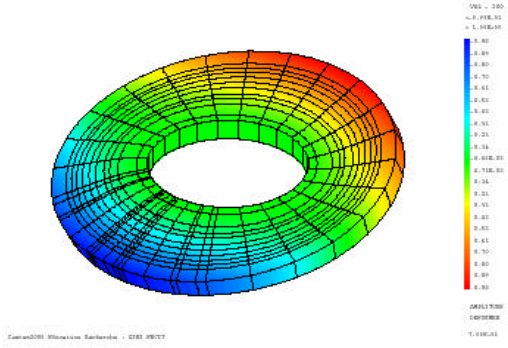
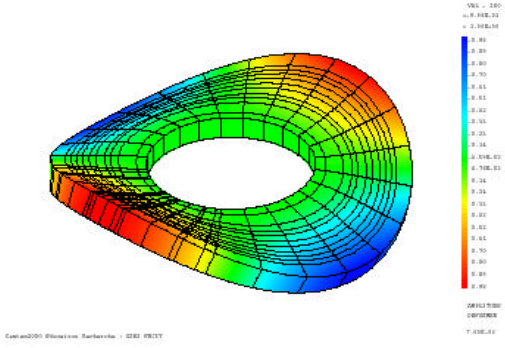
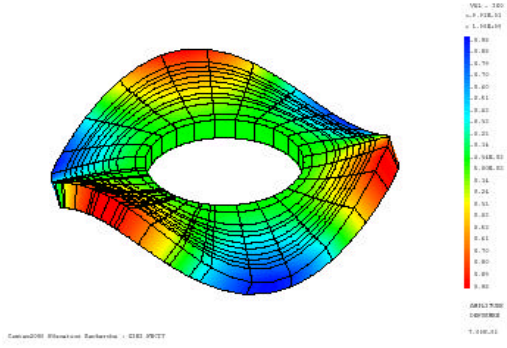


Figure 7.2: Mode 2





4.Application:

Question subsidiaire:
Comment calculer la réponse d'une structure dont on a travaillé les modes

ETUDE de CAS

Modélisation des fréquences crissantes

L ’approche théorique pour modéliser le crissement consiste à **:**

Considérer le crissement comme une *instabilité dynamique* de *l’équilibre stationnaire*

Principe :

⇒ Déterminer l’équilibre glissant : Zone contact, force normale Ne

⇒ Etude de stabilité de l’équilibre stationnaire (on introduit une perturbation glissante)

ETUDE de CAS

Modélisation des fréquences crissantes

Considérer le crissement comme une *instabilité dynamique* de *l'équilibre stationnaire*

⇒ **Linéarisation** des équations - matrices de masse et de raideur non symétriques

⇒ **Analyse de stabilité** : trouver les modes complexes associés au problème en projetant sur une base modale sans frottement tronquée

⇒ un mode est **instable** si la partie réelle de sa valeur propre est positive

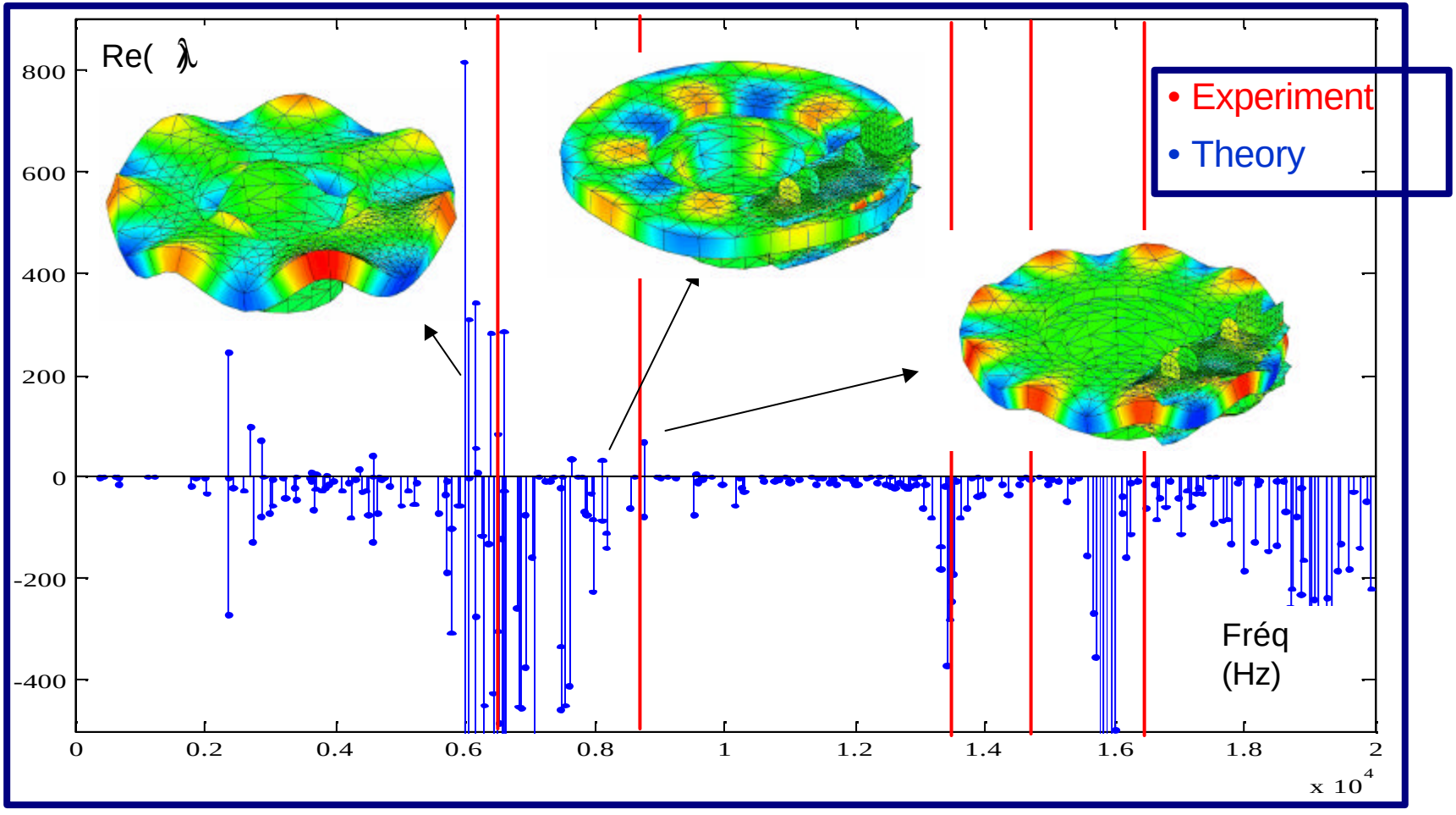
Modélisation des fréquences crissantes

- On calcule alors les termes de l'équation des vibrations du système, et les modes propres associés

$$\boxed{(\mathbf{M} + f.\mathbf{M_f}).\ddot{\underline{U}}^* + \mathbf{C}.\dot{\underline{U}}^* + (\mathbf{K} + f.\mathbf{K_f}).\underline{U}^* = \underline{0}}$$

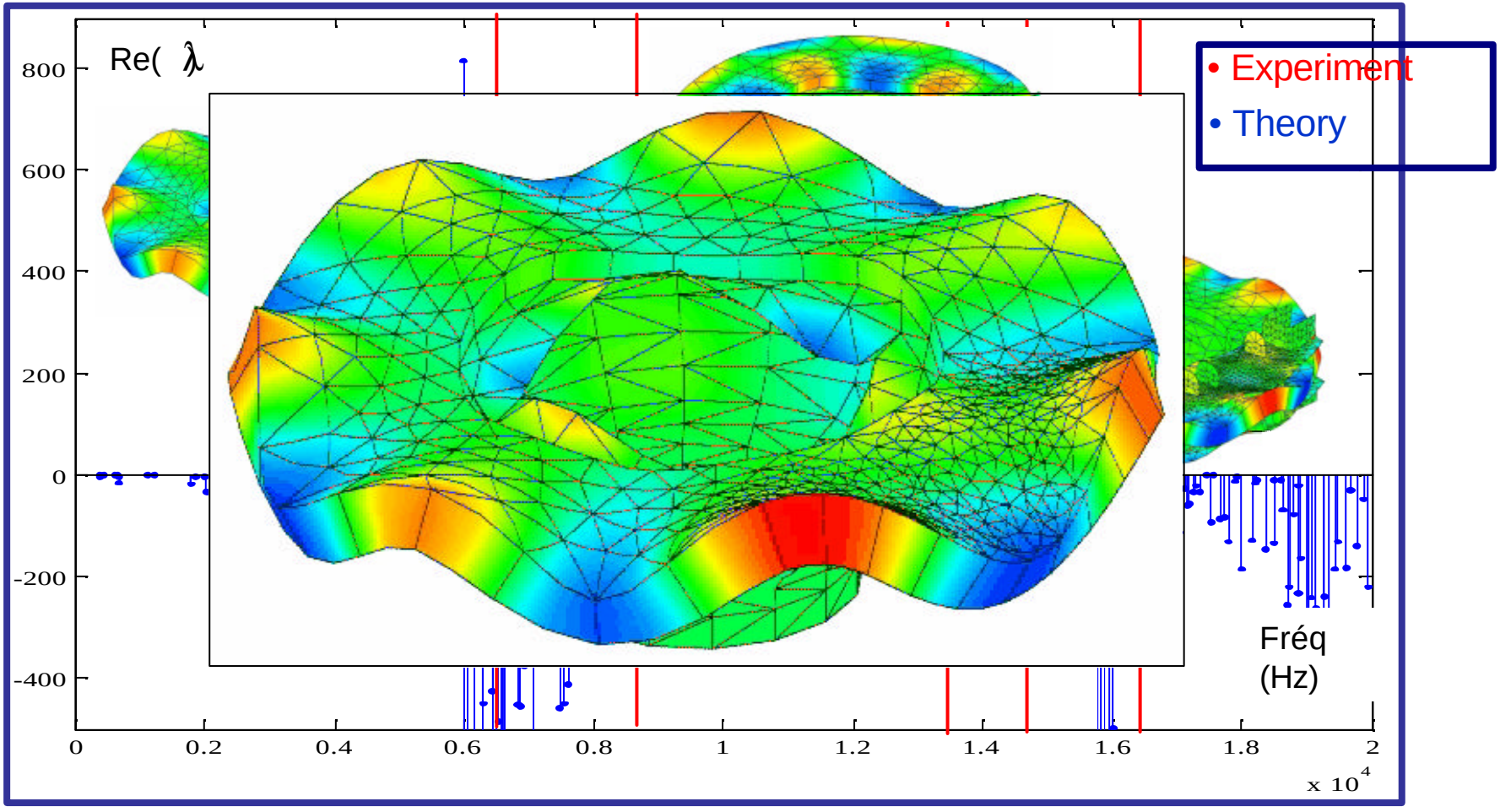
ETUDE de CAS

Modélisation des fréquences crissantes



ETUDE de CAS

Modélisation des fréquences crissantes



COMPLEMENTS de DYNAMIQUE des STRUCTURES:
MS6:COMMENT REDUIRE LES VIBRATIONS D'UNE STRUCTURE

$$x = Xe^{jwt} = H(jw)F_0 e^{jwt},$$

$$H(jw) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^t B_i}{m_i(-w^2 + 2jd_i w + w_i^2)}$$

Réponse en fréquence

F^{-1}:transformée de Fourier inverse

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i q_i = \sum_{i=1}^{n} B_i^t B_i e^{-d_i t} \cos(w_i' t + j_i)$$

$$x(t) = h(t) * f(t),$$

h(t):Réponse impulsionnelle

***: produit de convolution**

Se généralise pour un nombre de modes infini

Fin de la MS
Merci de votre attention