STATIQUE

Il s'agit ici de déterminer la courbe que fait le câble de suspension du pont suspendu, et de trouver la tension qu'il subit suivant les paramètres du pont.

On fait l'hypothèse que le poids du câble est négligeable devant celui du tablier.

On applique la relation fondamentale de la statique à un bout de câble de longueur projetée horizontalement dx subissant de la part du tablier une force : mg*dx, où m est la masse linéique du tablier.

On trouve une tension projetée horizontalement constante et égale à To et: y''(x)=mg/ To (dérivée seconde par rapport à x) . Le câble trace une hyperbole

$$\boxed{y(x) = f\left(\left(\frac{2x}{L}\right)^2 - 1\right)}$$

Sa tension est maximale au sommet des pylônes et vaut :

$$\boxed{Q_0 = \frac{T_0}{2}\sqrt{1 + 16\frac{f^2}{L^2}}}$$

où f est la flèche et L la longueur du pont.

On en déduit le diamètre minimale du câble de section constante :

$$\boxed{Q_0 = \pi\sigma\frac{{d_0}^2}{4}}$$

où s est la limite de contrainte admissible par le matériau, ici l'acier.

Cette contrainte admissible est fixée par le constructeur en fonction de la limite d'élasticité (300 MPa) et de rupture (500 MPa) du matériau, en fonction des efforts que doit subir le ponts en présence de trafic routier, du vent, des séismes, de l'usure… et en fonction du coefficient de sécurité entre 2 et 3.

L'approximation de négligeance du poids du câble devant celui du tablier n'est plus valable pour les très grands ponts car pour un diamètre de 1.20 mètres, le câble a une masse linéique de 10 tonnes par mètres, ce qui correspond à celle du tablier. Mais la forme du câble ne varie pas beaucoup car un câble seul suspendu prend la forme d'un cosinus hyperbolique.

DYNAMIQUE

Il s'agit ici de faire une approche des premiers modes de vibrations verticales, c'est-à-dire de flexion des ponts suspendus.

Dans un premier temps, on étudie les modes propres de flexion des poutres uniformes, de section constante en appui simple.

On peut montrer, en considérant un bout de poutre fléchi, que le moment de flexion vaut :

$$\boxed{M(x) = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$ où I est le moment quadratique dépendant des dimensions de la section de la poutre, E le module d'Young du matériau.

Puis on montre que la force linéique à appliquer à la poutre pour être à l'équilibre vaut : $F(x) = -q(x) = -EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$

La force linéique que développe la poutre pour revenir à l'état d'équilibre est donc l'opposée, par application du théorème des actions réciproques. Par application de la relation fondamentale de la dynamique , on obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}}$$

On cherche les solutions de la forme:

f(x)*exp(iwt), en posant $\boxed{k^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}}$, la solution générale est :

f(x)= a*cos(kx)+b*sin(kx)+c*ch(kx)+d*sh(kx),

avec les conditions aux limites déterminées par les appuis simples :

f(x)=b*sin(kx), avec k=n*Π/L

D'où les pulsations : $\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{m}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

Et les fréquences : $\boxed{f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{m}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$

Si on tient compte de la raideur K de la suspension, en la considérant uniforme, l'équation du mouvement est alors :

$$\boxed{EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ky = 0}$$

Les pulsations deviennent : $\boxed{\omega_n^2 = \frac{EI}{m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \frac{K}{m}}$

On peut déterminer K à partir de mesures statiques.
Sur le pont de l'île d'Orléans au Québec, 3 camions de 27 tonnes chacuns sont placés au centre du tablier de 320 mètres de long.
La flèche maximale observée est de 356mm. En ramenant ce déplacement sur une longueur de 150 mètres et en négligeant la rigidité du tablier qui influe tout de même sur la raideur, on trouve :

$$\boxed{K = \frac{3Mg}{Ld}}$$ où M=27000 Kg et d est le déplacement.

K=14900 N/m²

Pour déterminer le moment quadratique, on assimile le tablier à un caisson rectangulaire creux, de largeur 18 mètres, de hauteur 4.5 mètres et d'épaisseur 0.5 mètre. Avec la section neutre au milieu, on calcule I=44m².

Pour le pont de l'île d'Orléans, avec m=12000Kg/m, E= 150GPa et L=320m,
Je trouve les premières fréquences : f1=0.386Hz f2=0.708Hz
Au lieu des valeurs théoriques et expérimentales : 0.290Hz et 0.341Hz

Pour le pont Humen en Chine, avec m=18340Kg/m, E=200GPa, I=80m² et L=880m, K=18300N/m², f1=0.170Hz, f2=0.200Hz, les valeurs théoriques étant 0.172Hz et 0.225Hz.

Les quelques fréquences calculées correspondent plutôt bien aux fréquences réelles. Cependant, ce résultat peut être tout à fait hasardeux. En effet, Il est très compliqué, voire impossible de modéliser les caractéristiques d'un pont suspendu dans tous ses détails. Le modèle que j'ai adopté reste très succinct.

Premièrement, le modèle du tablier, sa structure est à priori complexe puisque de section non uniforme et constitué de plusieurs matériaux, donc un moment quadratique est seulement hypothétique.

Ensuite, rien ne justifie l'hypothèse de l'uniformité de la raideur de la suspension, alors que les suspentes sont de longueur différente. En fait, le fait que le câble de suspension se déforme aussi compense la plus forte raideur des suspentes au milieu du pont (le câble se déforme plus facilement lorsque on exerce un pression au milieu).

Dernièrement, Le tablier n'est pas seulement en appui simple à ses extrémités puisque la partie extérieure du tablier ainsi que le pylône exercent un moment.