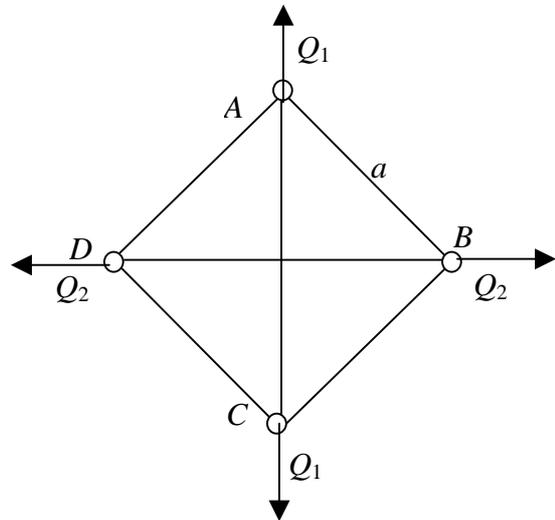


**Mécanique du Solide et des Matériaux**  
**PARTIE A**

**Groupe I : 1 exercice au choix**

**I-1) Limite élastique et limite de charge**

On considère la structure constituée de 6 barres articulées entre elles (les 4 petites barres étant de longueur identique  $a$ ) aux quatre nœuds  $ABCD$ , les barres  $AC$  et  $BD$  n'ayant aucune liaison commune. Toutes les barres de même aire de section droite  $S$  sont constituées d'un matériau dont la loi de comportement sera assimilé à celle d'un matériau *plastique parfait* de module d'Young  $E$  et de limite d'écoulement en traction compression  $\sigma_L$ . La structure est soumise au chargement à deux paramètres  $Q_1, Q_2$ . On notera  $H$  la force induite dans la barre  $DB$ ,  $V$  celle induite dans la barre  $AC$  et  $T$  la force induite dans les quatre autres barres.



1°) Déterminer et dessiner dans le plan  $Q_1, Q_2$  le domaine élastique initial en fonction de la force limite  $L$  que l'on déterminera.

Indication : Démontrer que  $H+V=2T$  en régime élastique. En déduire que sa frontière est donnée par

$$Q_2 = (\sqrt{2} - 1)Q_1 \pm \sqrt{2}L \quad Q_2 = (\sqrt{2} + 1)Q_1 \pm (2 + \sqrt{2})L$$

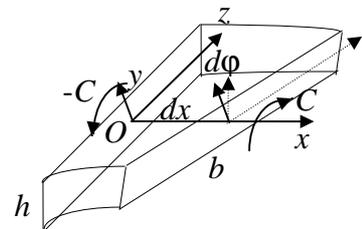
2°) Déterminer et dessiner sur le même dessin dans le plan  $Q_1, Q_2$  le domaine limite de charge. Que constate-t-on ? A quoi correspondent les points de contact entre les deux domaines ? Justifiez vos réponses.

Indication : Le domaine limite de charge correspond aux chargements  $Q_1, Q_2$  tels que toutes les barres ont atteint simultanément leurs limites de résistance.

3°) Montrer que le système sans charges extérieures appliquées ( $Q_1=Q_2=0$ ) peut être auto équilibré tout en supportant une contrainte de traction  $T_0$  initiale identique dans les quatre barres  $AB, BC, CD, DA$ . Déterminer la valeur maximale  $T_M$  de cette contrainte et en déduire le domaine élastique initial associé. Que peut-on dire du domaine élastique initial lorsque la précontrainte appliquée  $T_0 < T_M$  ?

**I-2) Rigidité de torsion d'une poutre**

1°) Considérons un tronçon de poutre de module de cisaillement  $\mu$ , de section constante repérée dans le référentiel  $y, z$  et de longueur  $dx$  soumis à un couple de torsion  $C$  et repérons par  $\varphi(x)$  l'angle de rotation de la section droite par rapport à l'état de repos. En définissant l'angle unitaire de torsion  $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$  constant sur



le tronçon, donner l'expression du tenseur des déformations  $\bar{\bar{\epsilon}}$  dans le tronçon en fonction de  $\theta, y$  et  $z$  dans l'hypothèse où les sections droites ne gauchissent pas. Quelle est la condition sur la forme de la section pour qu'elle ne gauchisse pas ?

2°) Si la forme de la section est telle que cette dernière gauchit, la section initialement plane se déforme hors de son plan et la composante  $u_x$  du champ de déplacement de la section n'est plus nulle. Justifiez le fait que l'on puisse l'écrire sous la forme :  $u_x = \theta \psi(y, z)$  où  $\psi(y, z)$  désigne la

fonction de torsion. En déduire l'expression du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  en fonction de  $\mu, \theta, \psi, y$  et  $z$  puis de  $\mu, \theta$  et  $\chi$  où  $\chi(y,z)$  est la fonction liée à  $\psi(y,z)$  par les relations  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = y + 2 \frac{\partial \chi}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -z - 2 \frac{\partial \chi}{\partial z}$  et montrer que  $\chi(y,z)$  doit vérifier les équations  $\Delta \chi(y,z) = -1$  et  $\chi(y,z) = 0$  sur le pourtour de la section.

3°) Par analogie avec la flexion dans laquelle  $M = \frac{D}{R}$  avec  $D = EI$  rigidité de flexion, on écrira en torsion  $C = D\theta$ , avec  $D$  rigidité de torsion et  $C$  couple de torsion, l'angle unitaire de torsion  $\theta$  jouant ici un rôle analogue à celui de la courbure  $1/R$ . En calculant de deux manières distinctes l'énergie de torsion accumulée dans le tronçon, montrer que la rigidité de torsion  $D$  a pour expression :

$$D = 4\mu \int_s \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 \right] ds$$

4°) Démontrer que la rigidité de torsion d'une poutre mince de section rectangulaire (largeur  $b$ , épaisseur  $h \ll b$ ) est donnée par  $D = \mu \frac{bh^3}{3}$ .

*Indication* : On fera l'analogie avec l'écoulement à bas nombre de Reynolds d'un fluide visqueux dans un canal de section rectangulaire (largeur  $b$ , épaisseur  $h \ll b$ ).

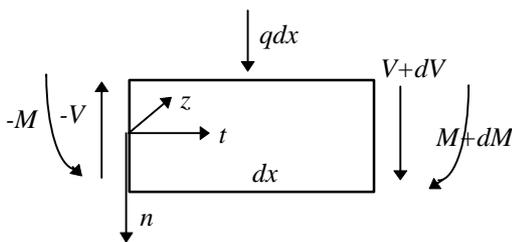
## Groupe II : 1 exercice au choix

### II-1) Modes propres de flexion d'une poutre

1°) Sous réserve d'une condition sur l'amplitude de vibration  $a$  que l'on précisera, montrer que les modes propres de vibration d'une poutre mince (longueur  $l$ , largeur  $b$ , épaisseur  $h$ , masse volumique  $\rho$ , module d'Young  $E$ ) sont solutions de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\rho b h \frac{d^2 y}{dt^2}$$

*Indications* :



La flexion est régie par l'équation différentielle

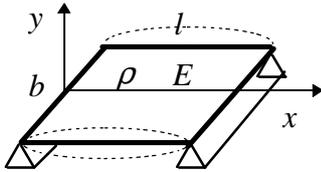
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x). \text{ Le signe - provient du fait que la flèche}$$

est repérée dans le référentiel  $x, y$  alors que les grandeurs dynamiques  $M(x)$  moment de flexion et  $V(x)$  effort tranchant appliqués sur la section droite d'abscisse  $x$  et la charge linéique  $q(x)$  sont définies dans le repère local  $t, n, z$ . On démontrera les relations  $V(x) = \frac{dM}{dx}$  et  $q(x) = -$

$\frac{dV}{dx}$ . En vibration, le chargement de la plaque est celui imposé par les forces d'inertie induites par sa masse uniformément répartie.

Le moment d'inertie d'une poutre mince à section rectangulaire est  $I = \frac{bh^3}{12}$

2°) En justifiant les conditions aux limites employées, montrer que les modes de vibration d'une poutre en **appui simple** sont données par :



$$y_n(x,t) = a \sin(k_n x) \cos(2\pi v_n t)$$

$$k^4 = \frac{\rho b h \omega^2}{EI} \quad v_n = \frac{\pi n^2}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho b h}} \quad n \text{ entier } > 0$$

3°) Quelles conditions aux limites faudrait-il appliquer si la poutre était **encastrée** au lieu d'être en appui simple ? Montrer que dans ce cas les fréquences propres sont données par la relation :

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho b h}} \quad n \text{ entier } > 0$$

avec  $\Phi_1 = 4,73$ ,  $\Phi_2 = 7,853$  et  $\Phi_n \approx (n + \frac{1}{2})\pi$  pour  $n > 2$  solutions de  $\cos(\Phi) \text{ch}(\Phi) = 1$ . On admettra les

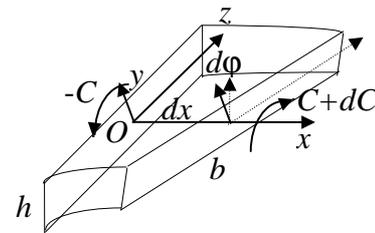
valeurs des solutions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  et on justifiera les solutions  $\Phi_n \approx (n + \frac{1}{2})\pi$  pour  $n > 2$ . On admettra les solutions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  et on justifiera la forme des solutions  $\Phi_n$  pour  $n > 2$ .

## II-2) Modes propres de torsion d'une poutre

1°) En écrivant l'équation d'équilibre dynamique du tronçon de poutre, l'angle de rotation de la section droite  $\varphi(x,t)$  étant une fonction de  $x$  et de  $t$  et le couple de torsion  $C$  variant également le long de  $x$ , établir l'équation différentielle des vibrations de torsion de la poutre :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} - \frac{J}{D} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$J = \int_S \rho r^2 ds$  désignant le moment d'inertie polaire de la section et  $D$  sa rigidité de torsion



2°) Montrer que les modes propres de vibration de torsion d'une poutre de longueur  $l$  **encastrée** à ses deux extrémités sont données par :

$$\varphi(x,t) = A \sin(n\pi \frac{x}{l}) \cos(2\pi v_n t) \quad \text{avec } v_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{D}{J}} \quad \text{et } n \text{ entier}$$

3°) En déduire que l'expression donnant ses fréquences propres de torsion d'une poutre mince (masse volumique  $\rho$ , module de cisaillement  $\mu$ ) de section droite rectangulaire (largeur  $b$  épaisseur  $h \ll b$ ) est :

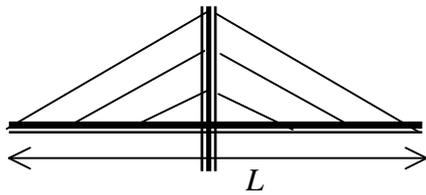
$$v_n = \frac{n}{l} \frac{h}{b} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

## PARTIE B

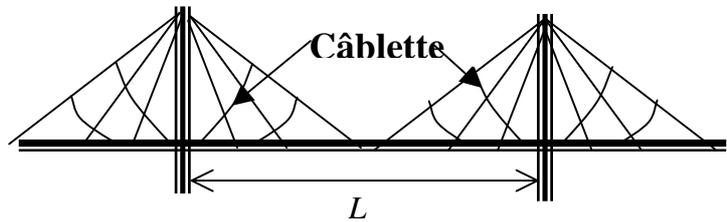
### Pont de Normandie : pré étude

#### Le pont de Normandie

Les ponts à haubans peuvent être classés schématiquement en deux catégories selon que la disposition de haubanage est de type *harpe* ou *éventail*.



Haubanage *Harpe*



Haubanage *Eventail*

Nous allons chercher à comparer l'efficacité de chacune de ces dispositions vis-à-vis de différents critères. Il s'agit de calculs de pré-étude pour la conception d'un pont haubané. Nous appliquerons ces résultats à l'étude du pont de Normandie.

*Pont de Normandie* : Pont à haubans disposés en Eventail.

$L=856$  m

$b=24$  m

$\gamma=73$  kN.m<sup>-3</sup>

$E_A=200$  GPa

$\sigma_A=1,2$  GPa

$\sigma_R=1,8$  GPa

$\rho_B=2400$  kg.m<sup>-3</sup>

$\sigma_B=10$  MPa

La contrainte d'écrasement du béton étant de 60 MPa

$h=215$  m

$h'=59$  m

$w=127$  kN.m<sup>-1</sup>

puisque le tablier est composé d'une partie centrale de 624 m en acier (75 kN.m<sup>-1</sup>) et de deux parties extrêmes (coté pylônes) de 116 m chacune en ossature mixte acier béton (270 kN.m<sup>-1</sup>).

$g=9.81$  m.s<sup>-2</sup>

Portée centrale.

Largeur du tablier

Poids spécifique des haubans

Module d'Young de l'acier à hauban.

Contrainte de traction maximale dans les haubans d'acier.

Contrainte à rupture de l'acier à hauban

Masse volumique du béton

Contrainte de compression admissible dans le béton.

Hauteur totale des pylônes (par rapport au sol).

Hauteur de la partie supérieure du tablier (par rapport au sol).

Poids linéique moyen du tablier.

Accélération de la pesanteur.



### Partie I : Efficacité du haubanage

Les critères retenus lors d'une pré étude pour caractériser l'efficacité d'un haubanage concernent :

- Sa raideur Il s'agit là d'un **paramètre très important qui conditionne la stabilité générale de l'ouvrage** tant du point de vue statique (résistance à la charge) que dynamique (modes propres de vibration).
- Sa masse (donc son coût l'acier haute résistance des haubans étant cher) comparé à la masse du tablier qu'il soutient.
- Son influence sur le dimensionnement et la portée du tablier.
- Son influence sur la masse, donc le coût, des pylônes et des fondations.

#### 1°) Efficacité vis-à-vis de la raideur

L'efficacité d'un hauban peut être appréciée par l'intensité de la force de rappel qu'il exerce sur le tablier. Si l'on répartit de part et d'autre de son point d'ancrage au tablier l'action d'un hauban situé à l'abscisse  $x$  comptée à partir du pylône, sur une longueur  $d$  de tablier égale à celle séparant deux

haubans consécutifs, nous définirons la raideur  $K = \frac{F_V}{\Delta d}$  du milieu *élastique* équivalent au hauban comme le rapport de la densité linéique de la force verticale de rappel, supposée uniformément répartie sur la longueur  $d$ , au déplacement vertical associé  $\Delta$  du tablier. Pour un hauban de section  $S$  de module d'Young  $E_A$  faisant un angle  $\alpha$  avec le tablier en son point d'ancrage d'abscisse  $x$  la raideur est donnée par :

$$K(x, \alpha) = \frac{E_A S}{xd} \frac{tg^2 \alpha}{(1 + tg^2 \alpha)^{3/2}}$$

Pour le hauban extrême d'abscisse  $x=L/2$ , elle s'écrit :

$$K(\lambda) = \frac{2E_A S}{Ld} \frac{4\lambda^2}{(1 + 4\lambda^2)^{3/2}}$$

$\lambda = \frac{H}{L}$  étant le paramètre caractérisant la géométrie globale des ponts haubanés,  $L$  portée entre pylônes et  $H$  hauteur des pylônes comptée à partir de la partie supérieure du tablier.

Montrer que la raideur  $K$  est maximale pour un angle  $\alpha_0$  particulier dont on déterminera la valeur. En déduire la disposition de haubanage la plus efficace vis à vis de ce critère et la valeur  $\lambda_0$  associée. En déduire la hauteur totale des pylônes qu'il aurait fallu pour optimiser le pont de Normandie en terme de rigidité de haubanage.

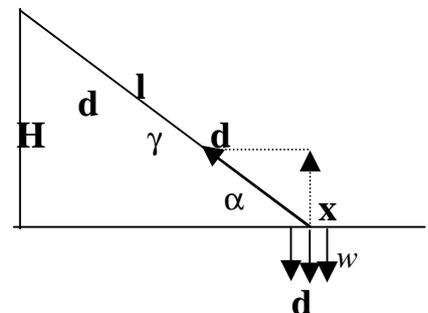
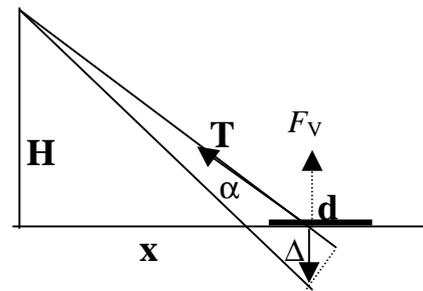
Calculer le rapport  $\lambda = \frac{H}{L}$  du pont de Normandie et son efficacité  $\zeta = \frac{K(\lambda)}{K(\lambda_0)}$  (en %) vis à vis

de la raideur du haubanage.

2°) *Efficacité vis à vis de la masse du haubanage*

Pour une hauteur de pylône  $H$  et une portée  $L$  données, déterminer les poids  $\Pi_H$  et  $\Pi_E$  des demi nappes de haubans, les indices  $H$  et  $E$  désignant respectivement la configuration *Harpe* et la configuration *Eventail*. Calculer la valeur du rapport  $\lambda_T = \frac{H}{L}$  de transition d'efficacité entre les deux dispositifs de haubanage et préciser le type de configuration le plus efficace lorsque  $\lambda < \lambda_T$ . Quelle approximation implique ce calcul. Montrer quelle est justifiée sur l'exemple du pont de Normandie en calculant le rapport de la masse du haubanage supportant le tablier (portée centrale) à la masse du tablier.

Indication : On supposera que l'action du tablier (d'aire de section droite  $A$  constante et de poids linéique  $w$  constant) sur les haubans peut être assimilée à densité de charge uniformément répartie sur toute la portée. La charge située sur l'élément de tablier de longueur  $dx$  situé à l'abscisse  $x$  sera considérée comme reprise par un hauban virtuel (d'aire de section droite  $dS$ , de longueur  $l$  et de poids spécifique, poids par unité de volume  $\gamma$ ) soumis à une contrainte de traction  $\sigma_A$  fixée et incliné d'un angle  $\alpha$  sur le tablier.



3°) *Efficacité vis-à-vis de la résistance du tablier*

Pour un rapport  $\lambda = \frac{H}{L}$  et une portée  $L$  donnés, l'efficacité de la disposition du haubanage

s'exprimera en terme de contrainte dans le tablier. Déterminer la position de la section de tablier

d'aire  $A$  supportant la contrainte maximale ainsi que le type et l'expression de cette contrainte pour les deux types de haubannage.

Quelle aurait été la portée  $L_H$  du pont de Normandie s'il avait été équipé d'un haubannage en *Harpe*. On assimilera le tablier à une poutre pleine équivalente en béton de largeur  $b$  et d'épaisseur  $e$  que l'on déterminera.

4°) *Efficacité vis-à-vis des pylônes et des fondations*

Pour une portée  $L$  donnée, l'efficacité de la disposition du haubannage s'exprimera en terme de coût, donc de poids des pylônes et de leurs fondations. Sachant que le rapport  $\lambda = \frac{H}{L}$  est de l'ordre de 0,2 pour l'ensemble des ponts à haubans, justifiez l'existence de ce compromis en vous appuyant sur les résultats obtenus précédemment. Quel est le critère le moins respecté dans ce compromis. Dans quel cas utilisera-t-on une disposition en *Harpe*.

Indications : Etudier le sens de variation des poids des pylônes, des fondations, des haubans et du tablier en fonction de  $\lambda$ . On utilisera pour l'estimation du poids du tablier le modèle de la poutre béton pleine équivalente.

5°) Le haubannage du pont de Normandie est équipé de « câbles » régulièrement espacées qui lient entre eux les différents haubans et le tablier. Quels rôles jouent ces "câbles" ?

## Partie II : Vibrations du pont de Normandie

Il s'agit de déterminer les fréquences propres et les modes propres de vibration d'une poutre élastiquement suspendue. Le résultat sera appliqué à la détermination des modes propres de vibration du pont de Normandie (pont haubané). Le tablier de longueur  $L=856$  m sera assimilé à une poutre béton de section rectangulaire d'épaisseur  $h=22,5$  cm, de largeur  $b=24$  m, constituée d'un matériau de masse volumique  $\rho=2400$  kg.m<sup>-3</sup>, de module d'Young  $E=50$  GPa et de coefficient de Poisson  $\eta=1/3$ . Il est suspendu aux pylônes par l'intermédiaire d'un haubannage que l'on assimilera à une lame flexible de longueur  $l$  et de raideur  $K=29$  kN.m<sup>-2</sup>.

### Oscillations de Flexion du tablier

1°) Le tablier est considéré comme une poutre suspendue par l'intermédiaire d'une lame élastique de raideur  $K$  représentant l'action des haubans. En vous appuyant sur les **résultats donnés**

**dans la partie A**, comment doit-on modifier l'équation de vibration  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\rho b h \frac{d^2 y}{dt^2}$  ? Montrer

que la relation entre les nouvelles fréquence propres  $\omega^*$  et les fréquence libres  $\omega$  en l'absence de suspension s'écrit :

$$\omega^{*2} = \omega^2 + \frac{K}{\rho b h}$$

Discuter qualitativement les limites en fonction des raideurs respectives de la poutre et de la lame de suspension.

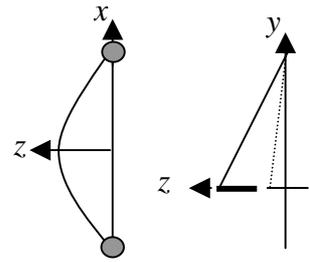
### Oscillation de flexion verticale du tablier

1°) Dessiner l'allure et calculer la fréquence et la période des quatre premiers modes d'oscillation verticale du tablier **libre non suspendu**. On justifiera le type de condition aux limites employé : appui simple ou encastrement.

2°) Le tablier étant **suspendu par ses haubans**, déterminer la fréquence et la période d'oscillation **réelles** du mode d'oscillation verticale du tablier du pont de Normandie.

### Oscillation latérale du tablier

Les oscillations latérales, encore appelées oscillations de *balancement*, sont des oscillations du tablier en dehors du plan vertical qu'il forme avec les pylônes.



1°) Que peut-on dire de l'influence du haubannage en regard des oscillations de balancement ? En déduire l'expression des fréquences propres d'oscillation latérale de la poutre tablier. On justifiera le type de condition aux limites employé : appui simple ou encastrement.

2°) Calculer les fréquences et les périodes des quatre premiers mode de balancement du tablier du pont de Normandie.

### Oscillation de torsion du tablier

1°) Le tablier est considéré comme une poutre suspendue par l'intermédiaire de deux lames élastiques de rigidité  $\frac{K}{2}$  distantes de sa largeur  $b$  représentant l'action des haubans. En vous appuyant sur les **résultats donnés dans la partie A**, comment doit-on modifier l'équation de

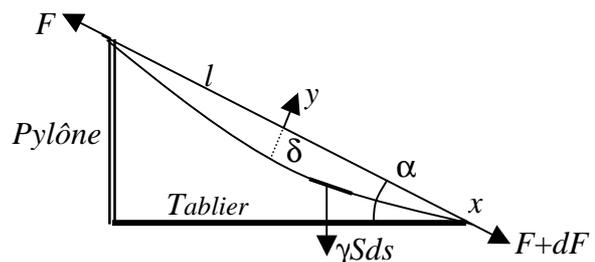
vibration  $\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} - \frac{J}{D} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$  ? Quelle est la relation entre les nouvelles fréquence propres  $\nu^*$  et les fréquence libres  $\nu$  en l'absence de suspension ? Discuter qualitativement les limites en fonction des raideurs respectives de la poutre et de la lame de suspension.

2°) Dessiner l'allure et calculer la fréquence et la période des quatre premiers modes de torsion du tablier **libre non suspendu**. On justifiera le type de condition aux limites employé : appui simple ou encastrement.

3°) Le tablier étant **suspendu par ses haubans**, déterminer la fréquence et la période d'oscillation **réelles** du mode de torsion du tablier du pont de Normandie.

## Partie III : Haubans et câbles du pont de Normandie

Un hauban est un câble de longueur à vide  $l_0$  attaché en deux points (tablier et pylône) distants de  $l$ . Le câble est constitué de 42 torons de diamètre  $\Phi=1,5$  cm constitués d'un acier de poids spécifique  $\gamma=73$  kN.m<sup>-3</sup> et de module d'Young  $E=200$  GPa. Il est en équilibre sous l'action d'une force de traction  $F$  mesurée côté pylône dans la direction de la corde  $l$  faisant un angle  $\alpha$  avec le plan du tablier. Pour des raisons évidentes d'efficacité, la force  $F$  est supérieure au poids  $\gamma S l_0$  du câble :  $F \gg \gamma S l_0$ .



1°) En écrivant l'équilibre d'un petit élément de câble de longueur  $ds$ , démontrer, en justifiant les approximations faites, que sa déformée est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma S x \cos \alpha}{F}$$

Déterminer sa flèche  $\delta$  et montrer que l'équation de sa déformée se met sous la forme :

$$y(x) = \frac{4\delta}{l^2} \left\{ x - \frac{l}{2} \right\} \left\{ x + \frac{l}{2} \right\}$$

En déduire, en justifiant les approximations faites, que son allongement élastique est  $\Delta l = \frac{Fl}{ES}$  et que

la longueur du hauban en place est  $l' = l + \frac{(\gamma S \cos \alpha)^2 l^3}{24F^2}$ . Etablir l'équation reliant  $F, l', l, \Delta l$  et  $l_0$ .

2°) La raideur axiale du câble étant définie par le rapport  $\frac{dF}{dl}$  de l'accroissement  $dF$  de la force  $F$  à l'accroissement  $dl$  de la longueur  $l$  de la corde, il lui correspond le module apparent :

$$E^* = \frac{\frac{dF}{dl}}{\frac{l}{S}} = \frac{l}{S} \frac{dF}{dl}$$

Etablir, en justifiant les approximations faites, l'expression :

$$E^* = \frac{E}{1 + \frac{1}{12} \frac{E(\gamma S l \cos \alpha)^2}{\sigma^3}}$$

Dans laquelle  $\sigma$  est la contrainte de traction qui règne dans le câble.

3°) Calculer l'angle  $\alpha$ , la longueur  $l$ , et la contrainte minimale  $\sigma_m$  régnant dans la paire de haubans la plus inclinée du pont de Normandie, sachant que chaque hauban supporte une longueur  $d=20$  m de tablier. En déduire la valeur du module apparent  $E_m^*$  de ces haubans.

La charge roulante maximale acceptable sur le tronçon de tablier de longueur  $d$  à 4 voies de circulation correspond au poids de 2 camions de 200 kN chacun par voie de circulation. En déduire la contrainte maximale  $\sigma_M$  supportée par ces haubans et leur module apparent  $E_M^*$  correspondant.

D'après les valeurs des rapports  $\frac{\sigma_M}{\sigma_R}$  et  $\frac{\sigma_M - \sigma_m}{\sigma_m}$  quel type de comportement à terme a-t-on retenu pour le calcul des haubans.

4°) La valeur  $E^*=180$  GPa du module apparent est considérée comme la limite inférieure pour assurer un bon comportement à l'ouvrage, aussi bien pour des raisons statiques (déformabilité, efforts dans le tablier) que dynamiques (sensibilité aux vibrations). Au vu des résultats précédent, sur quel paramètre faudrait-il jouer pour assurer la stabilité du pont sans charge roulante ? Quelles en seraient les conséquences ?

Les haubans sont reliés entre eux et au tablier par des câbles transversaux régulièrement répartis appelés "câblettes". Etablir, en justifiant les approximations faites, l'expression approchée :

$$E^{C^*} = E \frac{1}{1 + \frac{E(\gamma S l \cos \alpha)^2}{12(n+1)^2 \sigma^3}}$$

du module équivalent d'un hauban en fonction du nombre  $n$  de ces "câblettes". Calculer ce module équivalent pour le hauban précédent soumis à une contrainte de traction  $\sigma=0,5$  GPa lorsque le nombre de "câblettes" varie de 0 à 4.

Quelles conclusions en tirez vous sur les rôles joués par ces "câblettes" ?