

SYS 855 VIBROACOUSTIQUE
Chapitre 3 Les vibrations des systèmes continus.

Marc Thomas, ing., Ph.D.
Professeur département de génie mécanique
ETS

Montréal, février 2003

Table des matières

3. LES VIBRATIONS DES SYSTÈMES CONTINUS	3-2
3.1. Les vibrations des câbles	3-2
3.1.1. Fréquences naturelles et modes des câbles	3-4
3.1.1.1. conditions aux limites	3-5
3.1.1.2. Solution temporelle	3-6
3.1.2. Réponse vibratoire d'un câble	3-6
3.1.2.1. Conditions initiales	3-7
3.1.3. Application	3-7
3.2. Les vibrations des poutres en flexion	3-9
3.2.1. Solution temporelle	3-10
3.2.2. Solution spatiale	3-10
3.2.3. Exemple de conditions aux frontières	3-11
3.3. Les vibrations de membranes	3-18
3.3.1. Équations du mouvement	3-18
3.3.2. Conditions initiales et aux frontières	3-20
3.3.3. Réponse vibratoire	3-20
3.3.4. Conditions aux frontières	3-21
3.4. Les vibrations de plaques minces	3-23
3.4.1. Conditions aux frontières	3-23
3.4.2. Application pour une plaque rectangulaire appuyée sur ses bords	3-24
3.4.3. Calculs simplifiés des résonances de plaques carrées ou circulaires	3-25
3.4.4. Calculs simplifiés des résonances de plaques rectangulaires	3-26
3.5. Exercices Chapitre 3	3-30

Liste des figures

<i>Fig 3-1. Câble soumis à une force</i>	3-2
<i>Fig 3-2. Élément de câble subissant un déplacement</i>	3-2
<i>Fig 3-3. Poutre encastrée</i>	3-9
<i>Fig 3-4. Vibrations de poutres</i>	3-16
<i>Fig 3-5. Vibrations de poutres uniformes</i>	3-17
<i>Fig 3-6. Vibrations de membranes</i>	3-18
<i>Fig 3-7. membrane</i>	3-19
<i>Fig 3-8. Vibrations de plaques</i>	3-27
<i>Fig 3-9. Vibrations de plaques rectangulaires</i>	3-28
<i>Fig 3-10. Vibrations de plaques (les dimensions sont en cm)</i>	3-29

3. LES VIBRATIONS DES SYSTÈMES CONTINUS

3.1. LES VIBRATIONS DES CÂBLES

La figure 3.1 représente un câble dont la densité est ρ et la section est A . Le câble est fixé à ses 2 extrémités et sa tension est τ . Le câble vibre dans la direction y . Le mouvement est défini à chaque endroit en fonction du temps t et de la position x .

$w(x,t)$ représente la déflexion du câble.

$f(x,t)$ est la force externe par unité de longueur agissant sur le câble.

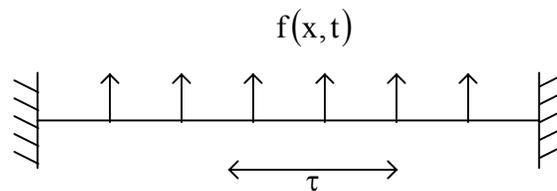


Fig 3-1. Câble soumis à une force

Considérons un élément infiniment petit du câble de longueur Δx .

La masse de l'élément de câble est égale à $\rho A \Delta x$

L'accélération est définie comme : $\ddot{y} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$

Considérons la loi de Newton sur un élément infinitésimal dans la direction y (figure 3.2).

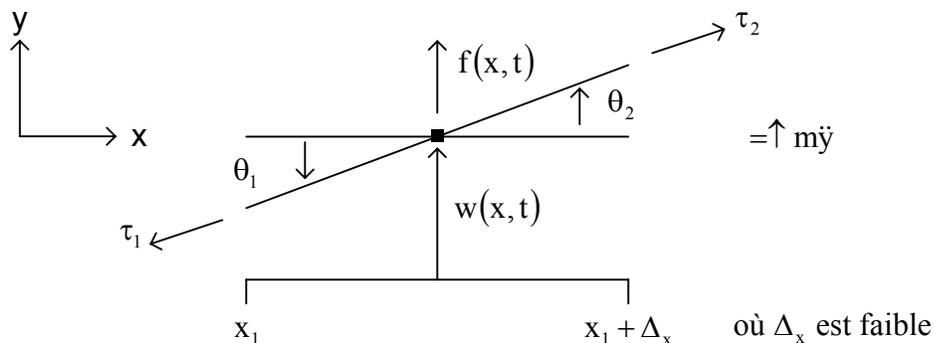


Fig 3-2. Élément de câble subissant un déplacement

$$-\tau_1 \sin \theta_1 + \tau_2 \sin \theta_2 + f(x,t) \cdot \Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

L'accélération est exprimée en termes de dérivée partielle, car w dépend aussi de x .

On suppose de petits déplacements (θ_1 et θ_2 petits)

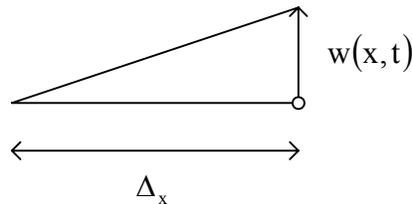
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta_i = \tan \theta_i \\ \cos \theta_i = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

On peut donc considérer que $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, la tension initiale dans le câble.

Pour de faibles déformations, on peut donc considérer l'approximation :

$$\sin \theta_1 = \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x_1} \quad \sin \theta_2 = \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x_2} \quad (3.3)$$

Les sinus pouvant être représentés par des pentes aux points x_1 et x_2 .



L'équation (3.1) devient :

$$\tau \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x_2} - \tau \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x_1} + f(x,t)\Delta x = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Delta x \quad (3.4)$$

On peut exprimer la pente au point x_2 en série de Taylor autour du point x_1

$$\Rightarrow \tau \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_2} = \tau \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_1} + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right|_{x_1} + \varepsilon \quad (3.5)$$

On néglige les termes supérieurs ε .

En incluant l'équation (3.5) dans l'équation (3.4), on obtient,

$$\Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right|_{x_1} + f(x,t)\Delta x = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \Delta x \quad (3.6)$$

Comme Δ_x est petit, il est inutile de désigner le point 1, dans l'équation 3.6.

On obtient,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

si $f = 0$ et $\tau = \text{constant}$, on obtient l'équation différentielle des câbles:

$$C^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

où $C = \sqrt{\frac{\tau}{\rho A}}$ est la vitesse de l'onde.

Le degré de l'équation différentielle 3.8 requiert 2 conditions initiales et 2 conditions aux limites pour résoudre.

L'équation (3.8) des câbles est sujette à deux conditions initiales temporelles, soient :

$$\left. \begin{array}{l} w(x,0) = w_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \dot{w}_0(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{déplacement} \\ \text{vitesse} \end{array} \text{ initiales} \quad (3.9)$$

On doit ajouter deux conditions spatiales définissant les conditions aux frontières définissant des points fixes aux extrémités, soient :

$$w(0,t) = w(\ell,t) = 0 \quad (3.10)$$

3.1.1. Fréquences naturelles et modes des câbles

$$\text{On pose : } w(x,t) = X(x)T(t) \quad (3.11)$$

En remplaçant l'équation 3.11 dans l'équation 3.8, on obtient :

$$\Rightarrow C^2 \overset{\infty}{X} T = X \overset{\infty}{T} \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{\infty}{X}}{X} = \frac{\overset{\infty}{T}}{C^2 T}$$

Puisque les deux termes de l'équation 3.12 dépendent de variables différentes t et x, l'égalité implique qu'elles sont égales à une constante :

$$\frac{\overset{\infty}{X}}{X} = \frac{\overset{\infty}{T}}{C^2 T} = -\sigma^2 \quad (\text{constante négative}) \quad (3.14)$$

La constante peut être positive, négative ou nulle.

Les réponses nulles ou positives ne mènent pas à une solution acceptable physiquement.

On considère donc la constante comme négative.

$$\frac{\overset{\infty}{X}}{X} = -\sigma^2 \quad (3.15)$$

$$\frac{\overset{\infty}{T}}{C^2 T} = -\sigma^2$$

La première équation de 3.15 conduit à :

$$\overset{\infty}{X} + \sigma^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = a_1 \sin \sigma x + a_2 \cos \sigma x \quad (3.16)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes à déterminer en fonction des conditions initiales et aux limites.

3.1.1.1. conditions aux limites

Les conditions aux limites sont :

$$X(0) = 0 \text{ et } X(\ell) = 0 \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow a_2 = 0 \text{ et } X(\ell) = a_1 \sin \sigma \ell = 0 \quad (3.18)$$

$$\text{si } a_1 \neq 0 \Rightarrow \sin \sigma \ell = 0$$

$$\Rightarrow \sigma \ell = n\pi \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{n\pi}{\ell}, \text{ où } n = 1, 2, \dots$$

On obtient donc une infinité n de solutions et l'équation 3.16 devient :

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \text{ où } n = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Il faut encore déterminer les constantes a_n d'après les conditions initiales.

3.1.1.2. Solution temporelle

Étant donné qu'il y a une infinité n de solutions σ_n , la seconde équation de 3.15 devient :

$$T_n'' + \sigma_n^2 C^2 T_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n \sin(\sigma_n C t) + B_n \cos(\sigma_n C t) \quad (3.22)$$

où A_n et B_n sont des constantes à déterminer.

Les pulsations naturelles (rad/s) du câble sont :

$$\omega_n = \sigma_n \times C$$

3.1.2. Réponse vibratoire d'un câble

L'équation 3.11 devient donc :

$$\Rightarrow w_n(x, t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi C t}{l}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi C t}{l}\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

où c_n et d_n doivent être déterminés d'après les conditions initiales.

$$d_n = a_n B_n \quad (3.24)$$

$$c_n = a_n A_n$$

Toutes les combinaisons linéaires de cette équation sont valables, donc la réponse vibratoire du câble devient:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sin \sigma_n x \sin \sigma_n C t + d_n \sin \sigma_n x \cos \sigma_n C t) \quad (3.25)$$

Il faut encore identifier les constantes c_n et d_n d'après les conditions initiales.

On peut remarquer que :

$$\int_0^{\ell} \left(\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \right) dx = \begin{cases} \ell/2 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (\text{conditions orthogonales}) \quad (3.26)$$

3.1.2.1. Conditions initiales

D'après l'équation 3.25, la condition initiale temporelle est

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (3.27)$$

En appliquant les conditions d'orthogonalité, on trouve :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\ell} w(x,0) \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \\ &= d_m \frac{\ell}{2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow d_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} w(x,0) \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx \quad (3.29)$$

où $m = 1, 2, \dots$

De façon similaire, en dérivant l'équation 3.25, on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sigma_n C \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \dot{w}_0(x) \quad (3.30)$$

On obtient,

$$c_n = \frac{2}{n\pi C} \int_0^{\ell} \dot{w}_0(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (3.31)$$

où $n = 1, 2, 3, \dots$

3.1.3. Application

Considérons :

- un déplacement initial du type $w(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l}$ et
- une vitesse initiale nulle $w'(x,0) = 0$.

on obtient :

$$\begin{aligned} c_n &= 0 && \text{pour } n = 1, 2, \dots \\ d_n &= 0 && \text{pour } n = 2, 3, \dots \\ d_1 &= 1 \end{aligned}$$

L'équation 3.25 devient :

$$w(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\pi C}{l}t\right) \quad (3.32)$$

$\omega = \frac{\pi C}{l}$ représente la première fréquence naturelle du câble.

La fonction $X_1(x) = \sin \frac{\pi}{l}x$ correspond au premier mode du câble.

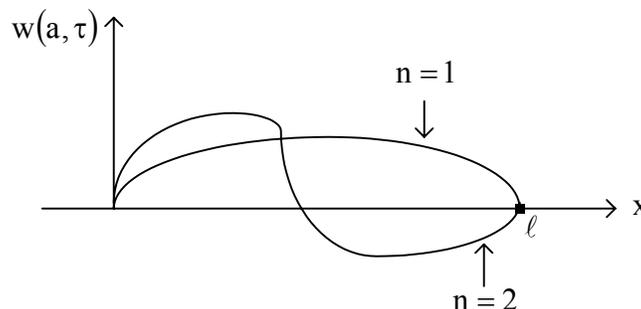
On peut continuer le raisonnement en posant $w_o(x,0) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ et une vitesse initiale nulle, pour obtenir les autres n modes .

Pour $n = m$, la m^{e} fréquence naturelle est :

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{l} \quad (3.33-a)$$

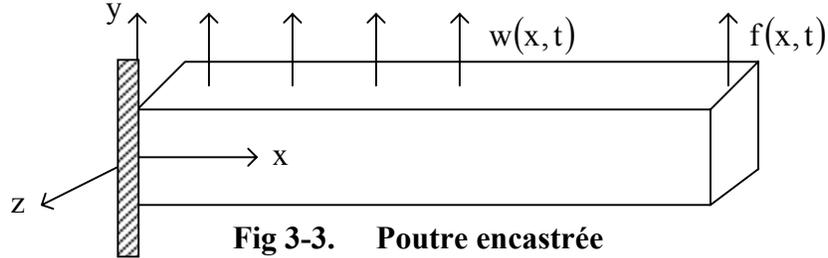
et le m^{e} mode sera :

$$w_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \quad (3.33-b)$$



3.2.LES VIBRATIONS DES POUTRES EN FLEXION

Soit une poutre encastrée libre dont le module d'élasticité de la poutre est E et son inertie de surface par rapport à un axe Z est I(x).



Le moment de flexion s'exprime comme suit :

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.34)$$

L'équation du mouvement conduit à l'expression suivante :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [M(x, t)] dx + f(x, t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.35)$$

L'équation 3.35 devient :

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = f(x, t) \quad (3.36)$$

En considérant $f(x, t) = 0$, l'équation 3.36 devient :

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + C^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3.37)$$

$$\text{où } C = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3.38)$$

Le degré de l'équation différentielle 3.37 demande quatre conditions aux frontières et deux conditions initiales. On pose :

$$w(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.39)$$

3.2.1. Solution temporelle

$$\text{l'équation devient : } C^2 \frac{X''''(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (3.40)$$

L'équation temporelle s'exprime comme :

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.41)$$

La solution de l'équation différentielle 3.41 est :

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (3.42)$$

où A et B sont des constantes à déterminer d'après les conditions initiales.

3.2.2. Solution spatiale

L'équation spatiale de 3.40 donne :

$$X''''(x) - \left(\frac{\omega}{C}\right)^2 X(x) = 0 \quad (3.43)$$

$$\text{où } \beta^4 = \left(\frac{\omega}{C}\right)^2 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3.44)$$

On suppose une solution de la forme :

$$X(x) = A e^{\beta x} \quad (3.45)$$

On trouve :

$$X(x) = a_1 \sin \beta x + a_2 \cos \beta x + a_3 \sinh \beta x + a_4 \cosh \beta x \quad (3.46)$$

$$\sinh(\beta x) = \frac{1}{2}(e^{\beta x} - e^{-\beta x})$$

$$\cosh(\beta x) = \frac{1}{2}(e^{\beta x} + e^{-\beta x})$$

Les constantes a_1 , a_2 , a_3 et a_4 devront être déterminées d'après les conditions aux frontières.

3.2.3. Exemple de conditions aux frontières

➤ Si une extrémité est libre, le moment et la force de cisaillement sont nuls à cet endroit.

$$\text{Moment} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.47)$$

$$\text{Force cisaillement} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.48)$$

➤ Si une extrémité est encastree, la deflexion et la pente sont nuls à cet endroit.

$$\begin{aligned} \text{deflexion} &= w = 0 \\ \text{pente} &= \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

➤ Si une extrémité est supportee simplement, le moment et la deflexion sont nuls à cet endroit.

$$\begin{aligned} \text{deflection} &= w = 0 \\ \text{moment} &= EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Exemple 3.1:

Soit une poutre simplement appuyee d'un bord ($x=0$) et encastree de l'autre ($x=l$). Les conditions aux limites portees dans l'equation 3.46 donnent :

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow a_2 + a_4 = 0 \\ \frac{\partial X(0)}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \beta(a_1 + a_3) = 0 \\ X(l) = 0 &\Rightarrow a_1 \sin \beta l + a_2 \cos \beta l + a_3 \sinh \beta l + a_4 \cosh \beta l = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$EI \frac{\partial^2 X(l)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \beta^2 (a_1 \sin \beta l + a_2 \cos \beta l + a_3 \sinh \beta l + a_4 \cosh \beta l) = 0$$

On trouve :

$$\tan(\beta l) = \tanh(\beta l) \quad (3.52)$$

ce qui résulte n solutions de la forme :

$$\beta_n \ell = \frac{(4n+1)}{4} \pi \quad (3.53)$$

Les n modes ont pour forme :

$$X_n(x) = (a_4)_n \left[\frac{\cosh(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)}{\sinh(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)} (\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x)) - \cosh(\beta_n x) + \cos(\beta_n x) \right] \quad (3.54)$$

pour n=1,2,3,..

La réponse du système est

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) X_n(x) \quad (3.55)$$

La fonction **poutrecontinu** (écrite en MATLAB) permet de calculer les fréquences naturelles et les modes d'une poutre en flexion en fonction des conditions aux limites et des caractéristiques de la poutre.

Les tableaux suivants montrent les équations pour calculer les premiers modes de poutres sous diverses conditions d'appuis (handbook of shock and vibration).

```

function poutrecontinu(n,bctype,bmpar,plotpar)
% Marc Thomas, Professeur au département de Génie mécanique,
ETS
% Poutrecontinu(n,bctype,bmpar,1) calcule les n premières
fréquences
% naturelles w et les modes U d'une poutre continue en
flexion, en fonction
% des conditions aux frontières bctype et des %
caractéristiques
% de la poutre bmpar.
% Les conditions aux frontières sont définies comme suit:
% bctype = 1 libre-libre
% bctype = 2 Encastré-libre
% bctype = 3 Encastré-appuyé
% bctype = 4 Encastrement glissant
% bctype = 5 Encastré-encastré
% bctype = 6 appuyé-appuyé
% Les paramètres de la poutre doivent être rentrés sous forme %
% bmpar = [E I rho A L]';
% où E est le module d'Young,
% I l'inertie de surface
% Rho la masse volumique
% A la section
% L la longueur.
if nargin==3
    plotpar=0;
end
E=bmpar(1);
I=bmpar(2);
rho=bmpar(3);
A=bmpar(4);
L=bmpar(5);
len=[0:.01:1]'; %Longueur normalisée de la poutre
%Calcul des fréquences naturelles et des modes en fonction des
conditions aux limites.
if bctype==1
    desc=['Libre-libre'];
    Bnl=[4.73 7.85 11 14.14 17.28];
    if n>5
        for i=6:n
            Bnl(i)=(2*i+1)*pi/2;
        end
    end
end

```

Fonction poutrecontinu (partie 1)

```

for i=1:n
    sig=(cosh(Bnl(i))-cos(Bnl(i)))/(sinh(Bnl(i))-sin(Bnl(i)));
    w(i,1)=(Bnl(i)^2)*sqrt(E*I/(rho*A*L^4));
    b=Bnl(i)*len;
    U(:,i)=cosh(b)+cos(b)-sig*(sinh(b)+sin(b));
    U(:,i)=U(:,i)/U(101,i);
end
elseif bctype==2
    desc=['Encastré-libre'];
    Bnl=[1.88 4.69 7.85 10.99 14.14];
    if n>5
        for i=6:n
            Bnl(i)=(2*i-1)*pi/2;
        end
    end
    for i=1:n
        sig=(sinh(Bnl(i))-sin(Bnl(i)))/(cosh(Bnl(i))-cos(Bnl(i)));
        w(i,1)=(Bnl(i)^2)*sqrt(E*I/(rho*A*L^4));
        b=Bnl(i)*len;
        U(:,i)=cosh(b)-cos(b)-sig*(sinh(b)-sin(b));
        U(:,i)=U(:,i)/U(101,i);
    end
elseif bctype==3
    desc=['Encastré-appuyé'];
    Bnl=[3.93 7.07 10.21 13.35 16.49];
    if n>5
        for i=6:n
            Bnl(i)=(4*i+1)*pi/4;
        end
    end
    for i=1:n
        sig=(cosh(Bnl(i))-cos(Bnl(i)))/(sinh(Bnl(i))-sin(Bnl(i)));
        w(i,1)=(Bnl(i)^2)*sqrt(E*I/(rho*A*L^4));
        b=Bnl(i)*len;
        U(:,i)=cosh(b)-cos(b)-sig*(sinh(b)-sin(b));
        U(:,i)=U(:,i)/U(52,i);
    end
elseif bctype==4
    desc=['Encastrement glissant'];
    Bnl=[2.37 5.50 8.64 11.78 14.92];
    if n>5
        for i=6:n
            Bnl(i)=(4*i-1)*pi/4;
        end
    end
end

```

Fonction poutrecontinu (partie 2)

```

for i=1:n
    sig=(sinh(Bnl(i))+sin(Bnl(i)))/(cosh(Bnl(i))-
cos(Bnl(i)));
    w(i,1)=(Bnl(i)^2)*sqrt(E*I/(rho*A*L^4));
    b=Bnl(i)*len;
    U(:,i)=cosh(b)-cos(b)-sig*(sinh(b)-sin(b));
    U(:,i)=U(:,i)/U(101,i);
end
elseif bctype==5
    desc=['Encastré-encastré'];
    Bnl=[4.73 7.85 11 14.14 17.28];
    if n>5
        for i=6:n
            Bnl(i)=(2*i+1)*pi/2;
        end
    end
    for i=1:n
        sig=(cosh(Bnl(i))-cos(Bnl(i)))/(sinh(Bnl(i))-
sin(Bnl(i)));
        w(i,1)=(Bnl(i)^2)*sqrt(E*I/(rho*A*L^4));
        b=Bnl(i)*len;
        U(:,i)=cosh(b)-cos(b)-sig*(sinh(b)-sin(b));
        U(:,i)=U(:,i)/U(52,i);
    end
elseif bctype==6
    desc=['Appuyé-appuyé'];
    for i=1:n
        Bnl(i)=i*pi;
        w(i,1)=(Bnl(i)^2)*sqrt(E*I/(rho*A*L^4));
        U(:,i)=sin(i*pi*len);
    end
end
x=len*L;
%Traçage des courbes
if plotpar==1
    for i=1:n
        plot(x,U(:,i))
        title([desc, ' ', 'Mode ', int2str(i), ' Fréquence
naturelle = ', num2str(w(i)), ' rad/s'])
        ylabel('Amplitude modale')
        xlabel('Longueur x de 0 à L')
        grid
        pause
    end
end

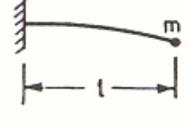
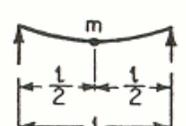
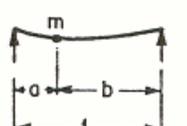
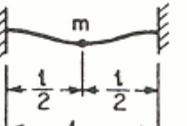
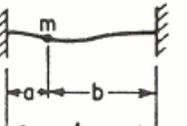
```

Fonction poutrecontinu (fin)

INTRODUCTION TO THE HANDBOOK

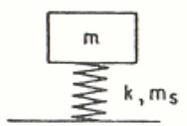
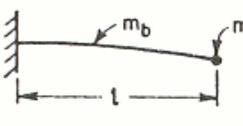
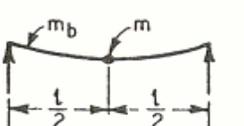
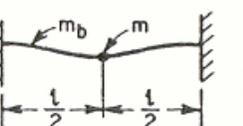
MASSLESS BEAMS WITH CONCENTRATED MASS LOADS

m = MASS OF LOAD, LB-SEC²/IN.
 l = LENGTH OF BEAM, IN.
 I = AREA MOMENT OF INERTIA OF BEAM CROSS SECTION, IN.⁴
 E = YOUNG'S MODULUS, LB/IN.²
 ω_n = ANGULAR NATURAL FREQUENCY, RAD/SEC

<p>FIXED-FREE END LOAD</p>  <p>$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$</p>	<p>HINGED-HINGED CENTER LOAD</p>  <p>$\omega_n = 4\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$</p>	<p>HINGED-HINGED OFF-CENTER LOAD</p>  <p>$\omega_n = \frac{l}{ab}\sqrt{\frac{3EI}{m}}$</p>	<p>FIXED-FIXED CENTER LOAD</p>  <p>$\omega_n = 8\sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$</p>	<p>FIXED-FIXED OFF-CENTER LOAD</p>  <p>$\omega_n = \frac{l}{ab}\sqrt{\frac{3EI^3}{mab}}$</p>
---	--	--	---	--

MASSIVE SPRINGS (BEAMS) WITH CONCENTRATED MASS LOADS

m = MASS OF LOAD, LB-SEC²/IN.
 $m_s(m_b)$ = MASS OF SPRING (BEAM), LB-SEC²/IN.
 k = STIFFNESS OF SPRING LB/IN.
 l = LENGTH OF BEAM, IN.
 I = AREA MOMENT OF INERTIA OF BEAM CROSS SECTION, IN.⁴
 E = YOUNG'S MODULUS, LB/IN.²
 ω_n = ANGULAR NATURAL FREQUENCY, RAD/SEC

<p>MASS - HELICAL SPRING</p>  <p>$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{(m + \frac{m_s}{3})}}$</p>	<p>FIXED-FREE END LOAD</p>  <p>$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(m + 0.23m_b)}}$</p>	<p>HINGED-HINGED CENTER LOAD</p>  <p>$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{l^3(m + 0.5m_b)}}$</p>	<p>FIXED-FIXED CENTER LOAD</p>  <p>$\omega_n = 14\sqrt{\frac{EI}{l^3(m + 0.375m_b)}}$</p>
--	---	--	---

AREA MOMENT OF INERTIA OF BEAM SECTIONS
(WITH RESPECT TO AXIS a-a)

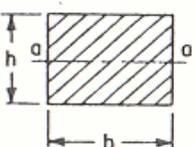
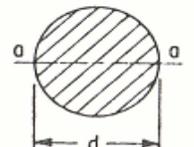
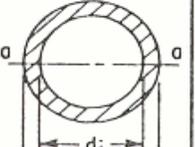
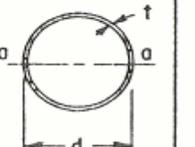
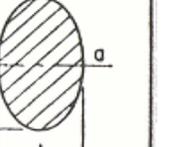
<p>RECTANGLE</p>  <p>$I = \frac{bh^3}{12}$</p>	<p>CIRCLE</p>  <p>$I = \frac{\pi d^4}{64}$</p>	<p>HOLLOW CIRCLE</p>  <p>$I = \frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4)$</p>	<p>THIN WALL CIRCLE</p>  <p>$I = \frac{\pi d^3 t}{8}$</p>	<p>ELLIPSE</p>  <p>$I = \frac{\pi d_2 d_1^3}{64}$</p>
--	--	--	--	---

Fig 3-4. Vibrations de poutres

BEAMS OF UNIFORM SECTION AND UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

ANGULAR NATURAL FREQUENCY $\omega_n = A \sqrt{\frac{EI}{\mu l^3}}$ RAD/SEC

WHERE E = YOUNG'S MODULUS, LB/IN²

I = AREA MOMENT OF INERTIA OF BEAM CROSS SECTION, IN⁴

l = LENGTH OF BEAM, IN.

μ = MASS PER UNIT LENGTH OF BEAM, LB-SEC²/IN³

A = COEFFICIENT FROM TABLE BELOW

NODES ARE INDICATED IN TABLE BELOW AS A PROPORTION OF LENGTH l MEASURED FROM LEFT END

FIXED-FREE (CANTILEVER)					
HINGED-HINGED (SIMPLE)					
FIXED-FIXED (BUILT-IN)					
FREE-FREE					
FIXED-HINGED					
HINGED-FREE					

Fig 3-5. Vibrations de poutres uniformes

3.3.LES VIBRATIONS DE MEMBRANES

Une membrane peut être considérée comme une corde en deux dimensions. Les membranes n'offrent aucune résistance en flexion, mais uniquement en tension. Une membrane est une plaque soumise à des forces de tension et dont on néglige les efforts de flexion. Elle se comporte comme une peau de tambour.

3.3.1. Équations du mouvement

Considérons une membrane bornée par le plan S dans le plan (x, y).

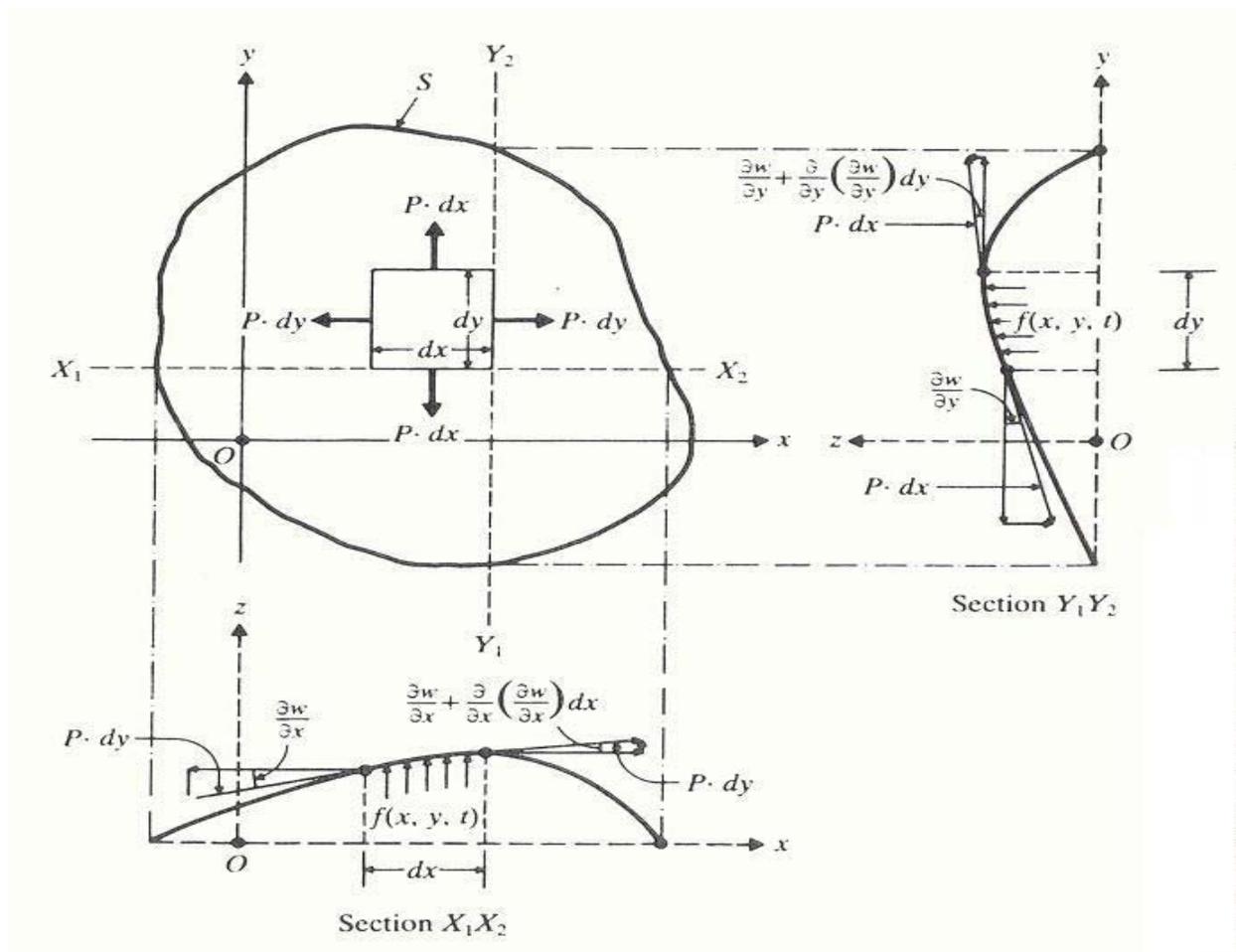


Fig 3-6. Vibrations de membranes

Soit, $w(x,y,t)$ la déformée de la membrane au point (x,y) et au temps t . On suppose le déplacement faible et perpendiculaire au plan xy . La tension t est constante par unité de longueur et ρ est la masse par unité de surface.

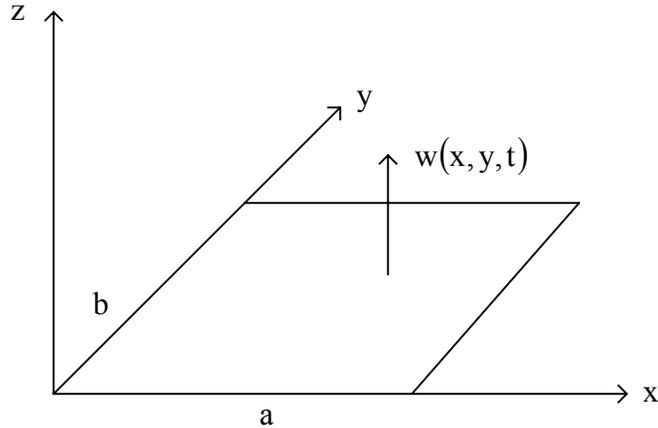


Fig 3-7. membrane

$f(x, y, t)$ représente la pression agissant dans la direction orthogonale z .

P représente l'intensité de la tension par unité de longueur. L'amplitude de P est constante. Si l'on considère un élément de surface $dx dy$, les forces d'amplitudes Pdx et Pdy agissent respectivement dans les directions y et x . On pose $P = \tau$.

Les forces agissant dans la direction z sont : $\tau \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy$ et $\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$.

La force de pression dans la direction z est $f(x, y, t) dx dy$ et la force d'inertie est $\rho(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy$ où $\rho(x, y)$ est la masse par unité de surface et $w(x, y, t)$ est le déplacement dans la direction z .

L'équation du mouvement de la vibration forcée est :

$$\tau \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.56)$$

Si la force externe $f = 0$, l'équation de vibration libre conduit à :

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (3.57)$$

$$\text{où } C = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (3.58)$$

Les équations aux frontières doivent être définies tout autour de la frontière.

Si l'on exprime l'opérateur Laplacien comme :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.59)$$

Les équations s'expriment comme :

$$c^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.60)$$

3.3.2. Conditions initiales et aux frontières

On a besoin d'exprimer deux conditions initiales et deux conditions aux frontières pour déterminer la solution du problème.

On exprime les conditions initiales par le déplacement initial $w_0(x, y) = w(x, y, 0)$

et la vitesse initiale $\dot{w}_0(x, y) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0)$.

a) Si la membrane est fixée en des points x_i, y_i de la frontière, on a $w(x_i, y_i, t) = 0 \quad t \geq 0$.

b) Si la membrane est libre de défléchir dans la direction z en des points x_j, y_j de la frontière, la force en z doit être nulle :

$\tau \frac{\partial w}{\partial n}(x_j, y_j, t) = 0 \quad t \geq 0$ où $\frac{\partial w}{\partial n}$ représente la dérivée de w par rapport à la normale un point x_j, y_j .

3.3.3. Réponse vibratoire

On pose : $W(x, y, t) = W(x, y) T(t) = X(x) Y(y) T(t) \quad (3.61)$

L'équation du mouvement est :

$$\frac{1}{C^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \text{constante} = -\omega^2 \quad (3.62)$$

On pose :

$$\frac{\ddot{X}}{X} = -\alpha^2 \text{ est une constante} \quad (3.63)$$

$$\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\beta^2 \text{ est une constante} \quad (3.64)$$

Les équations s'expriment comme :

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.67)$$

où α^2 et β^2 sont des constantes qui s'expriment comme : $\beta^2 + \alpha^2 = \omega^2$

On trouve :

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad (3.68)$$

$$Y(y) = C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad (3.69)$$

$$X(x) Y(y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sin \alpha x \cos \beta y + A_3 \cos \alpha x \sin \beta y + A_4 \cos \alpha x \cos \beta y \quad (3.70)$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.71)$$

Les constantes A_1, A_2, A_3, A_4, A et B doivent être déterminées par les conditions initiales et aux frontières.

3.3.4. Conditions aux frontières

Considérons une membrane carrée de longueur unitaire encadrée de tous côtés.

- Si $x = 0$ (encastrement), on obtient :

$$T(t) X(0) Y(y) = A_3 \sin \beta y + A_4 \cos \beta y = 0$$

$$\Rightarrow A_3 \sin \beta y + A_4 \cos \beta y = 0$$

$$\Rightarrow A_3 = A_4 = 0$$

$$\Rightarrow X(x) Y(y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sin \alpha x \cos \beta y$$

- Si $w = 0$ pour $x = 1$, on obtient :

$$A_1 \sin \alpha \sin \beta y + A_2 \sin \alpha \cos \beta y = 0$$

$$\Rightarrow \text{si } A_1 \neq 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$$

$$\alpha = n\pi \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

De façon similaire on trouve :

- pour $w = 0$ à $y = 1$

$$\beta = m\pi \quad m = 1, 2, \dots, \infty$$

Les valeurs propres sont :

$$\omega_{mn} = \pi C \sqrt{m^2 + n^2} \quad m, n = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.72)$$

Les vecteurs propres sont :

$$\sin n\pi x \sin m\pi y \quad (3.73)$$

La réponse vibratoire d'une membrane encastree de longueur unitaire est :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n\pi y) \left\{ A_{mn} \sin \sqrt{n^2 + m^2} C\pi t + B_{mn} \cos \sqrt{n^2 + m^2} C\pi t \right\} \quad (3.74)$$

où A_{mn} et B_{mn} sont determines par les conditions initiales.

3.4.LES VIBRATIONS DE PLAQUES MINCES

Une plaque peut être considérée comme une poutre en deux dimensions.

On suppose la déflexion faible par rapport à l'épaisseur h .

On suppose que le plan neutre ne se déforme pas durant la flexion.

Les contraintes normales à la plaque sont supposées négligeables.

La vibration libre de la plaque s'exprime comme :

$$D \nabla^4 w(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, y, t) \quad (3.75)$$

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

où E est le module d'élasticité
 ν est le coefficient de poisson
 ρ est la masse surfacique

$$\text{L'opérateur } \nabla^4 \text{ est } \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (3.76)$$

L'équation de mouvement libre est :

$$D \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, y, t) + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} (w, x, y, t) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} w(x, y, z) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, y, t) \quad (3.77)$$

3.4.1. Conditions aux frontières

- Pour une plaque encastree, on a le déplacement et la rotation nuls:

$$w(x, y, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n}(x, y, t) = 0 \text{ le long de l'encastrement.}$$

- Pour une plaque simplement supportée de tous côtés, on a la déflexion et les moments nuls :

$$w(x, y, t) = 0 \text{ sur les côtés}$$

$$\frac{\partial^2 \omega(x, y, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0, x = l_1$$

$$\frac{\partial^2 \omega(x, y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } y = 0, y = l_2$$

3.4.2. Application pour une plaque rectangulaire appuyée sur ses bords

Les conditions aux limites sont définies par des déplacements nuls et des moments nuls.

déflexion = $w(x, y, t) = 0$ partout

$$\text{Moment} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t) = 0 \quad x = 0 \text{ à } x = l_1 \quad (3.78)$$

$$\text{Moment} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) = 0 \quad y = 0 \text{ à } y = l_2$$

Les modes propres de la plaque sont :

$$w_{mn}(x, y) = w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.79)$$

Les pulsations propres de la plaque sont :

$$\omega_{mn} = \left(\frac{D}{\rho} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (3.80)$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$
 $m = 1, 2, 3, \dots$

Exemple 1:

Calculez le 1^{er} mode d'une plaque en acier en flexion simplement supportée de tous bords dont la longueur est de 50 cm, la largeur est de 25 cm, l'épaisseur est de 5 mm.

Réponse :

D = 2289

$\rho = \rho_m \cdot h = 7800 \cdot 0.005 = 39 \text{ kg/m}^2$

$\omega_{11} = 1512 \text{ rad/s} = 240 \text{ Hz}$

3.4.3. Calculs simplifiés des résonances de plaques carrées ou circulaires

Le ``Handbook of Shock and vibration`` de Harris permet de calculer les fréquences naturelles pour des plaques circulaires ou carrées en fonction des conditions d'appui.

INTRODUCTION TO THE HANDBOOK

NATURAL FREQUENCIES OF THIN FLAT PLATES OF UNIFORM THICKNESS

$$\omega_n = B \sqrt{\frac{E t^3}{\rho a^4 (1-\nu^2)}} \text{ RAD/SEC}$$

E = YOUNG'S MODULUS, LB / IN.²

t = THICKNESS OF PLATE, IN.

ρ = MASS DENSITY, LB-SEC²/IN.⁴

a = DIAMETER OF CIRCULAR PLATE OR SIDE OF SQUARE PLATE, IN.

ν = POISSON'S RATIO

SHAPE OF PLATE	DIAGRAM	EDGE CONDITIONS	VALUE OF B FOR MODE:								
			1	2	3	4	5	6	7	8	
CIRCULAR		CLAMPED AT EDGE	11.84	24.61	40.41	46.14	103.12				
CIRCULAR		FREE	6.09	10.53	14.19	23.80	40.88	44.68	61.38	69.44	
CIRCULAR		CLAMPED AT CENTER	4.35	24.26	70.39	138.85					
CIRCULAR		SIMPLY SUPPORTED AT EDGE	5.90								
SQUARE		ONE EDGE CLAMPED-THREE EDGES FREE	1.01	2.47	6.20	7.94	9.01				
SQUARE		ALL EDGES CLAMPED	10.40	21.21	31.29	38.04	38.22	47.73			
SQUARE		TWO EDGES CLAMPED-TWO EDGES FREE	2.01	6.96	7.74	13.89	18.25				
SQUARE		ALL EDGES FREE	4.07	5.94	6.91	10.39	17.80	18.85			
SQUARE		ONE EDGE CLAMPED-THREE EDGES SIMPLY SUPPORTED	6.83	14.94	16.95	24.89	28.99	32.71			
SQUARE		TWO EDGES CLAMPED-TWO EDGES SIMPLY SUPPORTED	8.37	15.82	20.03	27.34	29.54	37.31			
SQUARE		ALL EDGES SIMPLY SUPPORTED	5.70	14.26	22.82	28.52	37.08	48.49			

MASSLESS CIRCULAR PLATE WITH CONCENTRATED CENTER MASS

CLAMPED EDGES



$$\omega_n = 4.09 \sqrt{\frac{E h^3}{m a^2 (1-\nu^2)}}$$

SIMPLY SUPPORTED EDGES



$$\omega_n = 4.09 \sqrt{\frac{E h^3}{m a^2 (1-\nu)(3+\nu)}}$$

3.4.4. Calculs simplifiés des résonances de plaques rectangulaires

Une autre équation simplifiée pour calculer la 1^e fréquence de résonance de plaques ($m = n = 1$, $L=b$) et pour d'autres types d'appuis est la suivante :

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi^4 D}{b^4 \rho h} \right) \lambda^2 \quad (3.81)$$

$$\text{où } D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

où h : épaisseur (m) : On considère que $h < \frac{1}{20} b$.

ν : coefficient de Poisson

λ : constante d'appui (voir tableaux suivants)

ω : fréquence naturelle (rad/s)

E : module d'Young (Pa)

ρ : masse surfacique = $\rho_m * h$ (kg/m²)

$\lambda = 2$ pour une plaque simplement appuyée.

Cette équation est exacte pour des plaques carrées mais peut être appliquée pour des plaques rectangulaires en considérant b comme la plus grande longueur de la plaque (m).

L'équation précédente peut être simplifiée en considérant les hypothèses suivantes :

➤ $\frac{E}{\rho_m} = 25 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2$ (valable pour la plupart des matériaux ferreux).

➤ $\nu = 0.3$

$$\text{Alors } f = 2407 \left(\frac{h}{b^2} \right) \lambda \quad (\text{en Hz}) \quad (3.82)$$

Les tableaux suivants fournissent les valeurs de λ pour différentes conditions d'appui des plaques en fonction de h , b et L où L est défini comme le plus petit côté [références : Bruel and Kjaer, conception de fixtures].

Exemple :

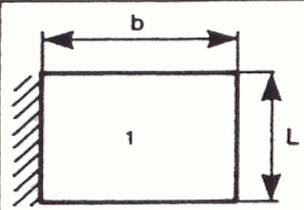
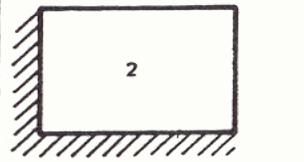
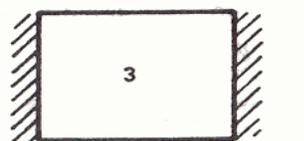
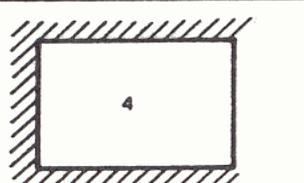
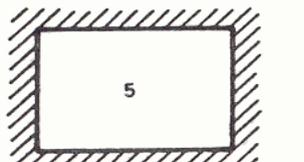
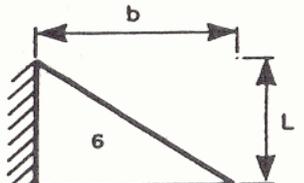
Calculez le 1^e mode d'une plaque en acier en flexion appuyée de tous bords dont la longueur est de 25 cm, l'épaisseur est de 5 mm, en utilisant la méthode de Harris.

Réponse :

$B = 5.7$

$$\omega = 5.7 \sqrt{\frac{E h^2}{\rho_m b^4 (1-\nu^2)}} = 2420 \text{ rad/s} = 385 \text{ Hz}$$

4.3. VALUES OF λ FOR PLATES

	λ^2	λ^{2*}	λ^*
	0,14	0,14	0,37
	$0,14 + 0,47 \left(\frac{b}{L}\right)^2 + 0,14 \left(\frac{4}{L}\right)^4$	0,75	0,87
	5,33	5,33	2,31
	$0,14 + \left(\frac{b}{L}\right)^2 + 5,34 \left(\frac{b}{L}\right)^4$	6,48	2,55
	$5,33 + 3,55 \left(\frac{b}{L}\right)^2 + 5,33 \left(\frac{b}{L}\right)^4$	14,21	3,77
	$0,39 + 0,96 \left(\frac{b}{L}\right)^2 + 0,36 \left(\frac{b}{L}\right)^4$	1,71	1,31

* Indicates that $b/L = 1$

800762

Table 4.3.

Fig 3-8. Vibrations de plaques

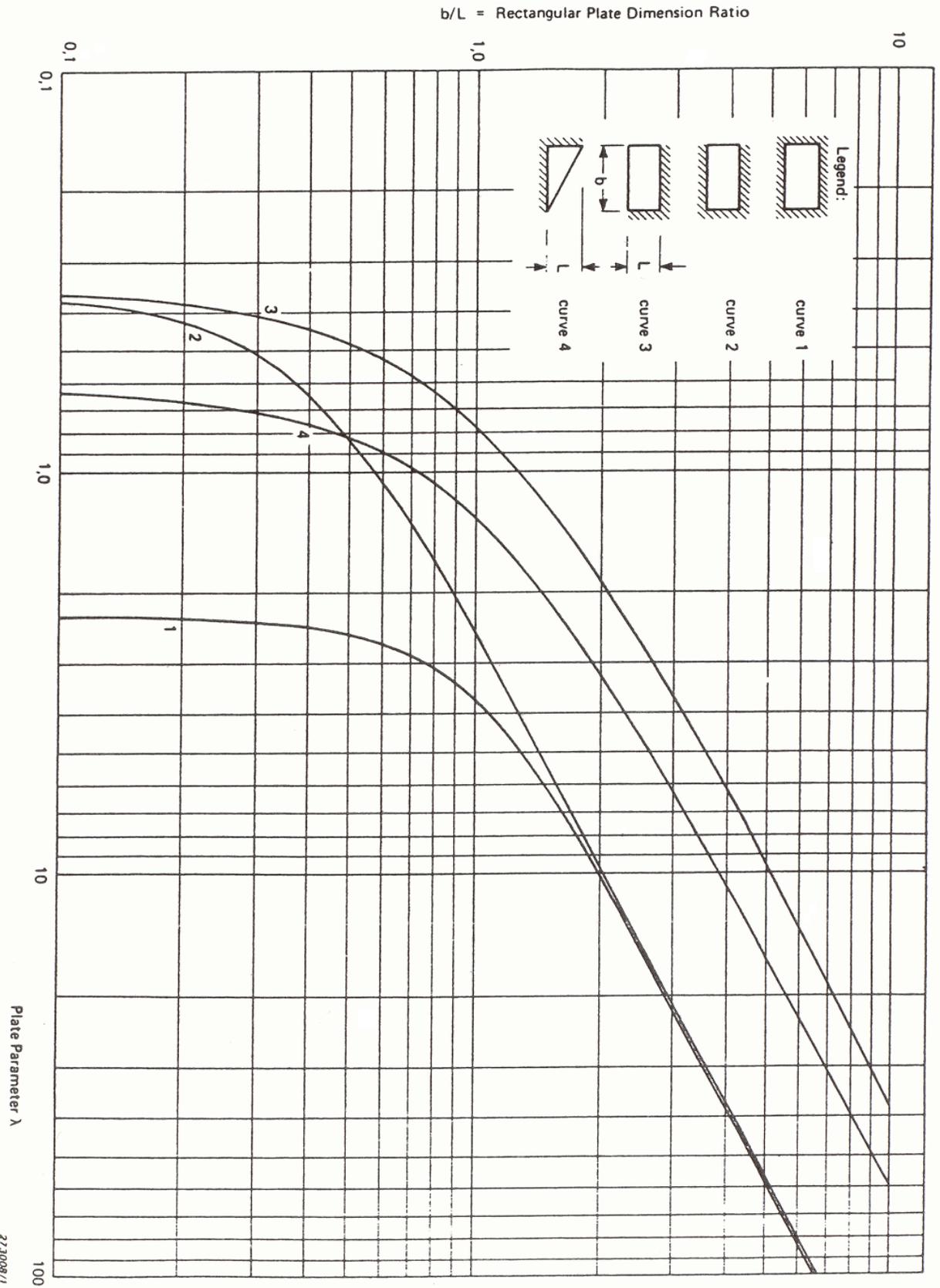


Fig 3-9. Vibrations de plaques rectangulaires

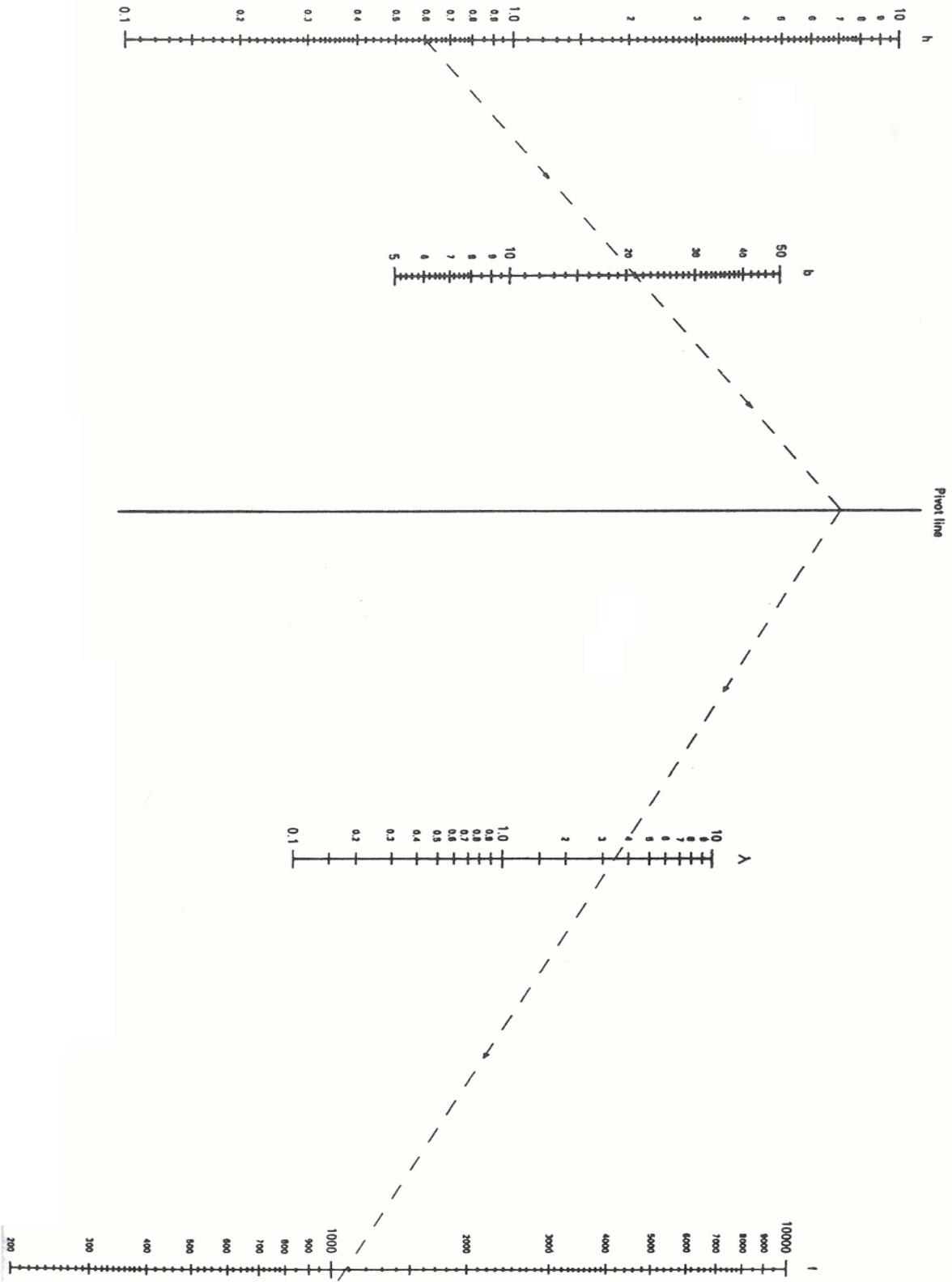


Fig 3-10. Vibrations de plaques (les dimensions sont en cm)

Exemple

Calculez la 1^{ère} fréquence de résonance d'une plaque carrée encadrée de tous bords dont l'épaisseur est de 6 mm et dont la longueur est de 210 mm.

Réponse

$$f = 1219 \text{ Hz}$$

Exemple :

Calculez le 1^{er} mode d'une plaque en acier en flexion encadrée de tous bords dont la longueur est de 20 cm, la largeur est de 10 cm, l'épaisseur est de 6 mm.

Réponse :

$$\lambda = 10$$

$$f = 3610 \text{ Hz.}$$

3.5. EXERCICES CHAPITRE 3

- 3-1. Calculez les coefficients c_n et d_n d'un câble de longueur, soumis à une vitesse initiale nulle et un déplacement initial $W(L/2,0)=1$.

Réponse de l'exercice 3.1:

$$c_n = 0$$

$$d_n = \frac{8}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{si } n \text{ impair}$$

- 3-2. Calculez analytiquement les fréquences naturelles d'une poutre sur 2 appuis simples, en supposant comme conditions initiales, des vitesses nulles et une déformation de la forme :

$$w(x,0) = \frac{\sin(2\pi x)}{l}$$

Vérifiez vos résultats à l'aide du logiciel poutreflexion.

Réponse de l'exercice 3.2

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$